Mathematische Methoden der Geowissenschaften I – Lösung zur Übung Fehlerrechnung

Aufg. 1:

a) $\sigma_z = \frac{1}{2}\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$

b) $\sigma_z = \frac{1}{2}\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$

c) $\sigma_z = 2\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{x^6}}$

d) $\sigma_z = \sqrt{y^4\sigma_x^2 + (2xy)^2\sigma_y^2}$

e) $\sigma_z = \sqrt{\frac{16}{\left(x^2 + y^2\right)^6}\left(x^2\,\sigma_x^2 + y^2\sigma_y^2\right)}$

Aufg. 2:

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \sum_i \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial x_i}\right)^2 \sigma_{x_i}^2 = \sum_i \left(\frac{1}{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\sum_k x_k\right)^2 \sigma_{x_i}^2 = \sum_i \frac{1}{N^2}\sigma_{x_i}^2 = \frac{1}{N^2}\sum_i \sigma_{x_i}^2 = \frac{1}{N^2}N\sigma_{x_i}^2 = \frac{1}{N}\sigma_{x_i}^2$$

mit

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\sum_k x_k = 1 \quad \text{wg.} \quad \frac{\partial x_k}{\partial x_i} = \begin{cases} 1 \text{ für } i = k \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

Schließlich mit $\sigma_{x_i}^2 \equiv \sigma_x^2$ (Alle x entstammen derselben Grundgesamtheit.)

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma_x^2}{N}$$

Aufg. 3:

a) Dichte des Wassers: ρ(7,2°C; 35,25) = 1027,4419 kg m^{-3}

Fehler der Dichte:

$$\left.\frac{\partial\rho}{\partial T}\right|_{7,2°C} = -0{,}14056\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3\,°C}}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial S} = 0{,}8\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3}}$$

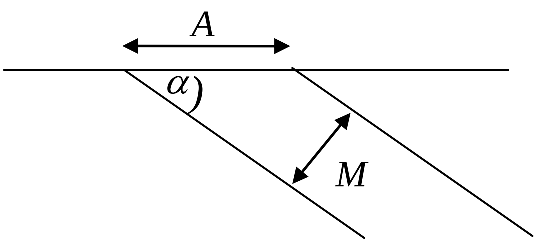
$$\sigma_\rho = \sqrt{\sigma_T^2\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)^2 + \sigma_S^2\left(\frac{\partial\rho}{\partial S}\right)^2} = 0{,}021\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3}}$$

Damit ergibt sich für die Dichte ρ = 1027,442 ± 0,021 kg m^{-3} (Temperaturmessung hat mit ca. 1,4% den größten relativen Fehler der Messwerte → zwei signifikante Stelle für den Fehler des Ergebnisses → Präzision der Dichteangabe entsprechend → 3 Nachkommastellen).

b) Da hier $\sigma_S^2\left(\frac{\partial\rho}{\partial S}\right)^2 > \sigma_T^2\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)^2$ ist, sollte die Genauigkeit der Salzgehaltsmessungen verbessert werden.

Aufg. 4:

a)



b)

$$\bar{A} = \frac{1}{N}\sum A_i = 4{,}88\ \mathrm{m}$$

$$\sigma_A = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum\left(A_i - \bar{A}\right)^2} = 0{,}55\ \mathrm{m}$$

$$\sigma_{\bar{A}} = \sqrt{\frac{\sigma_A^2}{N}} = 0{,}24\ \mathrm{m}$$

Die Ausstrichbreite beträgt somit A = 4,9 ± 0,3 m (eine signifikante Stelle, da N < 50; konservative Rundung; rel. Fehler ca. 5 %).

c) Mit der mittleren Ausstrichbreite aus (a) ergibt sich für die Mächtigkeit:

$$M = A\sin\alpha = 4{,}88\,\mathrm{m}\,\sin(20°) = 1{,}67\ \mathrm{m}$$

Der Fehler der Mächtigkeit beträgt:

$$\frac{\partial M}{\partial \alpha} = A\cos\alpha$$

$$\frac{\partial M}{\partial A} = \sin\alpha$$

$$\sigma_M = \sqrt{\sigma_\alpha^2\left(\frac{\partial M}{\partial \alpha}\right)^2 + \sigma_A^2\left(\frac{\partial M}{\partial A}\right)^2} = \sqrt{\sigma_\alpha^2\left(A\cos\alpha\right)^2 + \sigma_A^2\left(\sin\alpha\right)^2} = 0{,}179\,\mathrm{m}$$

(Achtung: σ_α muss in Bogenmaß angegeben werden!)

Die Mächtigkeit der Schicht beträgt also 1,7 ± 0,2 m (eine signifikante Stelle für den Fehler; rel. Fehler der Winkelmessung (10 %) ist am größten).