

Mathematische Grundlagen/Methoden der Geowissenschaften I

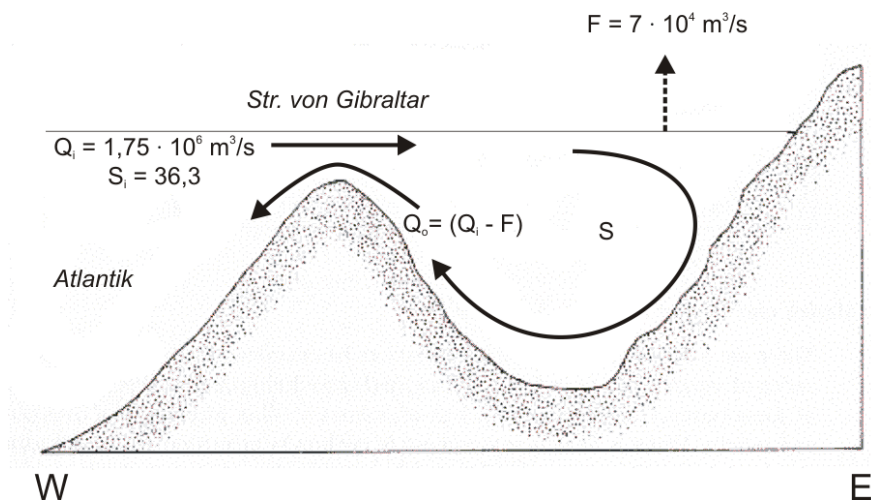
Übung Gewöhnliche Differentialgleichungen 1. Ordnung

(Literatur: Papula, Bd. 2, Kap. V, Speziell Abschnitt 2.4)

Salzgehalt im Mittelmeer

Einführung:

Das Mittelmeer ist über die Straße von Gibraltar mit dem offenen atlantischen Ozean verbunden. Die maximale Tiefe dieser Meerenge beträgt lediglich ca. 300 m. Bedingt durch die Lage in den Subtropen verdunstet über dem Mittelmeer mehr Wasser als durch Niederschlag und Flusseintrag in das Mittelmeer hinein gelangen; die Nettoverdunstung beträgt heute $F = 7 \cdot 10^4 \text{ m}^3/\text{s}$ (s. Abb.). Der damit einhergehende Wasserverlust wird durch einen oberflächennahen Einstrom aus dem Atlantik kompensiert. Weiterhin führt die Verdunstung zu einer Zunahme des Salzgehaltes im Mittelmeerwasser im Vergleich zum einströmenden Wasser. Hierdurch steigt die Dichte des Wassers auf dem Weg von Westen nach Osten zunehmend an. Schließlich ist die Dichte so groß, dass das Wasser im östlichen Teil des Mittelmeeres absinken kann. Von dort strömt es in der Tiefe Richtung Gibraltar, wo es schließlich wieder in den Atlantik gelangt.



Heute strömen $Q_i = 1,75 \cdot 10^6 \text{ m}^3/\text{s}$ vom Atlantik in das Mittelmeer; der Salzgehalt des einströmenden Wassers beträgt $S_i = 36,3$ (dimensionslos: [g Salz pro kg Wasser]). Da sich das Volumen des Mittelmeeres ($V = 3,8 \cdot 10^6 \text{ km}^3$) nicht ändert, ist der Ausstrom $Q_o = Q_i - F$.

Aus der Massenerhaltung folgt für die Änderungsrate der Masse von Salz im Mittelmeerwasser, M : (Änderung der Salzmenge) = (Salztransport ins Mittelmeer) minus (Salztransport aus dem Mittelmeer); mathematisch formuliert

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d(\rho VS)}{dt} = Q_i \rho_i S_i - Q_o \rho S.$$

Darin ist S der Salzgehalt des Mittelmeerwassers und ρ dessen Dichte. ρ_i bezeichnet die Dichte des einströmenden Atlantikwassers und t kennzeichnet die Zeit. Da ρ und V als konstant angenommen werden dürfen, können wir unter Berücksichtigung von $Q_o = (Q_i - F)$ schreiben:

$$\rho V \frac{dS}{dt} = Q_i \rho_i S_i - (Q_i - F) \rho S.$$

Im Ozean sind Variationen der Dichte viel kleiner als die des Salzgehaltes. In guter Näherung gilt $\rho = \rho_i$ und damit für den Salzgehalt des Mittelmeeres:

$$V \frac{dS}{dt} = Q_i S_i - (Q_i - F) S. \quad (1.1)$$

Aufgaben:

- 1.) Bestimmen sie mit Hilfe von Gl. (1.1) den Salzgehalt im Mittelmeer im heutigen Gleichgewichtszustand, der frei von zeitlichen Änderungen ist.

- 2.) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGL in Gl. (1.1). Führen Sie die Integration mit Hilfe der Trennung der Variablen durch. Hinweis: Eine Stammfunktion von $\frac{1}{ax+b}$ ist $\frac{1}{a} \ln|ax+b|$ für $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

- 3.) Untersuchen Sie die zeitliche Entwicklung des Salzgehaltes im Mittelmeer über einen Zeitraum von 400 Jahren nach einem plötzlichen Anstieg der Nettoverdunstungsrate von F auf $F_{neu} = 10 \cdot 10^4 \text{ m}^3/\text{s}$.
 - 3.1) Finden Sie unter Berücksichtigung Ihres Ergebnisses aus Aufg. (2) die spezielle Lösung der DGL für den heutigen ($t = 0$) Salzgehalt aus Aufg. (1) und die gestörte Nettoverdunstung, F_{neu} .
 - 3.2.) Stellen Sie Ihr Resultat grafisch dar (Zeitachse in Jahren) und beschreiben Sie das Ergebnis.

- 4.) Gl. (1.1) lässt sich für eine Stoffmenge in einem beliebigen Reservoir folgendermaßen verallgemeinern: (Änderungsrate der Stoffmenge) = (Stofftransport hinein) minus (Stofftransport heraus). Daraus ergeben sich vielfältige geowissenschaftliche Anwendungsmöglichkeiten dieses mathematischen Modells. Nennen Sie mindestens 2 Beispiele.