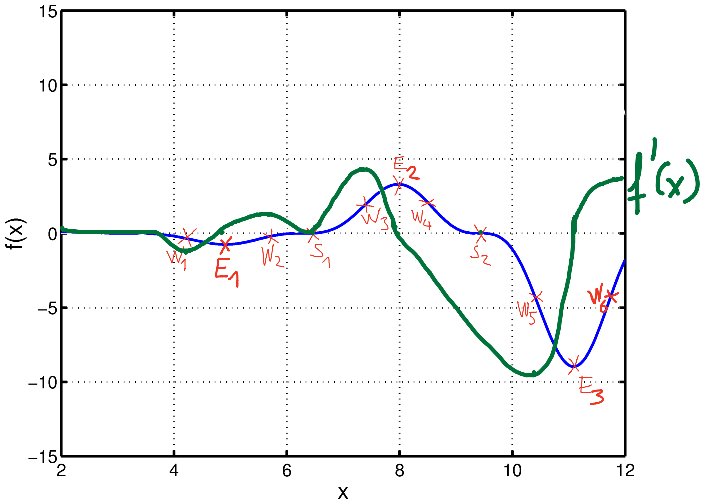
Mathematische Grundlagen der Geowissenschaften I (WiSe 2014/15) – Aufgaben 2

Thema: Differentialrechnung, Taylorreihen

(Literatur: Weltner, Mathematik für Physiker, Bd. 1)

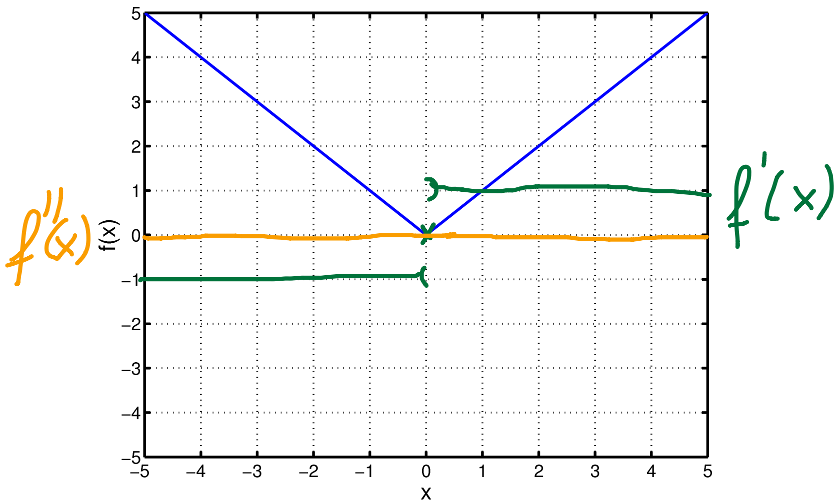
Aufgabe 1:

a) Markieren Sie die Extrem-, Sattel- und Wendepunkte des Funktionsgraphen. Skizzieren Sie anschließend die erste Ableitung des Funktionsgraphen in das Koordinatensystem.



b) Skizzieren Sie erste und zweite Ableitung des Funktionsgraphen in das Koordinatensystem. Sind beide Ableitungen stetig?

$f''(x)$ ist stetig, da der Grenzwert f'' gegen x_0 für jedes $x_0 \in D_f$ existiert.



$f'(x)$ ist nicht stetig, da nicht im gesamten D_f der Grenzwert von f' gegen x_0 mit $f(x_0)$ übereinstimmt

2.

$$y(t) = y_0 \sin\left[\left(\frac{D}{m}\right)^{\frac{1}{2}} t\right]$$

$$y'(t) = y_0 \cdot \left(\frac{D}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \cos\left[\left(\frac{D}{m}\right)^{\frac{1}{2}} t\right]$$

$$y''(t) = y_0 \cdot \left(\frac{D}{m}\right) \cdot \left(-\sin\left[\left(\frac{D}{m}\right)^{\frac{1}{2}} t\right]\right)$$

3.

$$f(x) = 2x^4 - 8x^2$$

Nullstelle: Substitution: $x^2 = z$

$$f(z) = 2z^2 - 8z$$

$$0 = 2z^2 - 8z \quad | :2$$

$$0 = z^2 - 4z$$

$$0 = z(z-4)$$

$\hookrightarrow z_1 = 0 \quad z_2 = 4$

Rücksubstitution:

$$x = \sqrt{z}$$

$x_1 = \sqrt{z_1} = \underline{\underline{0}}$ $\quad x_2 = \sqrt{z_2} = \underline{\underline{2}}$

$x_3 = \sqrt{z_2} = \underline{\underline{-2}}$

zu 3.

Extremwerte (lokale Maxima und Minima)

$$f(x) = 2x^4 - 8x^2$$

$$f'(x) = 8x^3 - 16x$$

$$f''(x) = 24x^2 - 16$$

notwendige Bedingung:

$$f'(x_E) = 0$$

$$0 = 8x_E^3 - 16x_E$$

$$0 = 8x_E(x_E^2 - 2)$$

$\hookrightarrow$ $x_{E_1} = 0$ $\quad x_{E_2} = +\sqrt{2}$ $\quad x_{E_3} = -\sqrt{2}$

hinreichende Bedingung:

$f''(x_{E_1}) = -16$	$f''(x_{E_2}) = 32$	$f''(x_{E_2}) = 32$
$-16 < 0$	$32 > 0$	$32 > 0$
$\hookrightarrow$ lokales Maximum	$\hookrightarrow$ lokales Minimum	$\hookrightarrow$ lokales Minimum
bei $x_{E_1} = 0$	bei $x_{E_2} = +\sqrt{2}$	bei $x_{E_2} = -\sqrt{2}$
am Punkt $(0 \mid 0)$	am Punkt $(+\sqrt{2} \mid 8)$	am Punkt $(-\sqrt{2} \mid 8)$

4.

$$f(x) = e^{x} (\sin x)^{-1}$$

$$f(x) = \frac{e^{x}}{\sin(x)}$$

$$f'(x) = \frac{e^{x}\sin(x) + e^{x}\cos(x)}{\sin^{2}(x)}$$

$$f'(x) = \frac{e^{x}(\sin(x) + \cos(x))}{\sin^{2}(x)}$$

$$f'(x) = e^{x} \cdot (\sin(x) + \cos(x)) \cdot \sin^{2}(x)^{-1}$$

5. a)

$$V = \pi r^{2} h$$

$$F = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h + 2 \cdot r^{2} \cdot \pi$$

$$= 2 \cdot \pi \cdot (r \cdot h + r^{2})$$

$$h = \frac{V}{r^{2} \cdot \pi}$$

$\Rightarrow$

$$F = 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{V}{r \cdot \pi} + r^{2} \right)$$

$$F = 2 \cdot \left(\frac{V}{r} + r^{2} \pi \right)$$

b) $F(r) = 2 \cdot \left(\frac{V}{r} + r^2 \pi \right)$

$F(r) = 2 \cdot \left(V \cdot r^{-1} + r^2 \pi \right)$

$F'(r) = -2V \cdot r^{-2} + 4\pi r$

$F''(r) = 4V \cdot r^{-3} + 4\pi$

notwendige Bedingung:

$0 = -2V \cdot r_{min}^{-2} + 4\pi r_{min}$

$0 = \left(-2V \cdot r_{min}^{-3} + 4\pi\right) r_{min}$

$\rightarrow r_1 = 0$

entspricht nicht

$\hookrightarrow D_f$

$0 = -2V \cdot r_{min}^{-3} + 4\pi$

$2V r_{min}^{-3} = 4\pi$

$\frac{2V}{r_{min}^3} = 4\pi$

$2V = 4\pi \cdot r_{min}^3$

$\frac{2V}{4\pi} = r_{min}^3$

$r_{min} = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$

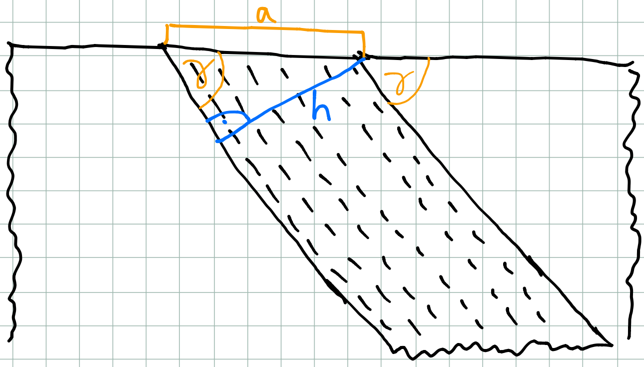
hinreichende Bedingung

$F''(r_{min}) = \frac{4 \cdot V \cdot 2\pi}{V} + 4\pi$

$F''(r_{min}) = 12\pi \qquad 12\pi > 0$

$\hookrightarrow$ Oberfläche des Zylinders ist minimal wenn der Radius $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ beträgt.

⑥ a)



$$\sin\gamma = \frac{h}{a}$$

$$h = \sin\gamma \cdot a$$

b) $\gamma = 45°$

↳ in Bogenmaß:

$\gamma = \frac{1}{4}\pi$

Annährung mittels Taylor-Reihe:

$$h\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot a + \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)a}{1!}\cdot\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

mit $x = 1$

$$h\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot a + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot a\cdot\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$h\left(\frac{\pi}{4}\right) = a\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$h\left(\frac{\pi}{4}\right) = a\cdot 0{,}858$$

c)

über Taylor-Reihe

$$h\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot 10m + \frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot 10m}{1!} \cdot \left(1 - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$h\left(\frac{\pi}{3}\right) = 10m \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$h\left(\frac{\pi}{3}\right) = 10m \cdot 0{,}8424$$

$$h\left(\frac{\pi}{3}\right) = 8{,}424m$$

über Lösungsansatz aus a)

$$h = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot 10m$$

$$h = 8{,}660m$$

Prozentualer Fehler

$$\left(1 - \frac{8{,}424m}{8{,}660m}\right) \cdot 100\% = \underline{\underline{2{,}725\%}}$$