Lösungen

Thema: Vektoranalysis

Aufgabe 1:

a)

$$\vec{\nabla}\phi = \left(e^{x+2y} + 2\,\sin(z) + z^2 y, 2\,e^{x+2y} + z^2 x, 2\,x\,\cos(z) + 2\,zxy\right)$$

b)

$$\vec{\nabla}\phi = -\frac{2}{r^4}\,(x, y, z) = -\frac{2}{r^4}\,\vec{r}$$

Aufgabe 2:

a)

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = 3$$

Das Feld divergiert überall, d.h. jeder Punkt des Raumes stellt eine Quelle dar.

b)

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = 2z$$

Die Ebene $z = 0$ ist quellen- und senkenfrei. Im Raum unterhalb dieser Ebene ist jeder Punkt eine Senke (negative Divergenz bzw. Konvergenz), oberhalb eine Quelle (positive Divergenz).

Aufgabe 3:

a)

$$\vec{\nabla}\times\vec{u} = (0, 0, 1)$$

Dies ist ein Wirbelfeld (Scherung senkrecht zur z-Achse).

b)

$$\vec{\nabla}\times\vec{u} = (0, 0, 0)$$

Dieses Feld ist wirbelfrei.

Aufgabe 4:

Aus $x + y = 1$ folgt $y = 1 - x$. Einsetzen in $h(x, y)$ liefert:

$$h(x, 1-x) = \frac{1}{3\,x^2 - 2\,x + 4} = H(x)\,.$$

Ableiten nach x unter Verwendung der Quotientenregel liefert:

$$H'(x) = \frac{-6\,x + 2}{(3\,x^2 - 2\,x + 4)^2}\,.$$

Im Maximum ist $H'(x) = 0$ und folglich $x = \frac{1}{3}$ und $H_{\max} = \frac{3}{11} \approx 0,27$.