INTEGRALRECHNUNG

Aufg. 1

Die Gesamtmasse ergibt sich aus den Massen des Erdkerns (M_k) und des Erdmantels (M_m)

$$M = M_k + M_m = \int_0^{3470} 4\pi r^2 \rho_k \, dr + \int_{3470}^{6370} 4\pi r^2 \rho_m \, dr$$

$$= 4\pi \left(\rho_k \int_0^{3470} r^2 \, dr + \rho_m \int_{3470}^{6370} r^2 \, dr \right)$$

$$\left[f(x) = r^2 \quad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{1}{3} r^3 + C \right]$$

$$M = 4\pi \left(\rho_k \left(\frac{1}{3} r^3 \Big|_0^{3470} \right) + \rho_m \left(\frac{1}{3} r^3 \Big|_{3470}^{6370} \right) \right)$$

$$= 4\pi \left(11 \cdot 10^{12} \frac{kg}{km^3} \cdot 1{,}39 \cdot 10^{10}\, km^3 + 4{,}5 \cdot 10^{12} \frac{kg}{km^3} \cdot 7{,}22 \cdot 10^{10}\, km^3 \right)$$

$$\simeq \underline{\underline{6{,}0 \cdot 10^{24}\, kg}}$$

(Der tatsächliche Wert beträgt $5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg)

Aufg. 2

$$f(t) = 35 - 5t \Rightarrow F(t) = 35t - \frac{5}{2}t^2 + C$$

a)

$$V = \int_0^4 35 - 5t \, dt = 35t - \frac{5}{2}t^2 \Big|_0^4$$

$$= 35 \cdot 4 - \frac{5}{2}4^2 = \underline{100}$$

In den ersten 4 h laufen 100 l Öl aus.

b)

$$60 = \int_0^T 35 - 5t \, dt = 35t - \frac{5}{2}t^2 \Big|_0^T$$

$$60 = 35T - \frac{5}{2}T^2 \Rightarrow \frac{5}{2}T^2 - 35T + 60 = 0$$

$$T^2 - 14T + 24 = 0$$

$$T_{1/2} = \frac{14}{2} \pm \sqrt{\frac{14^2}{4} - 24}$$

$$T_1 = 2$$

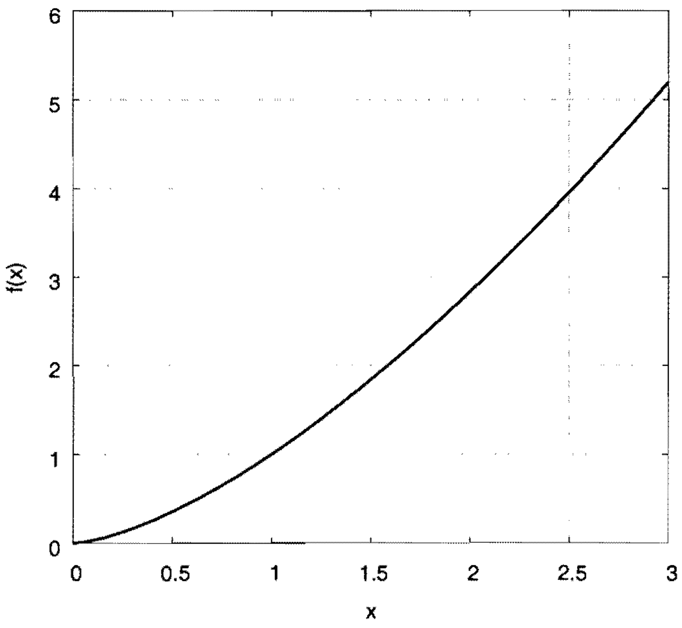
$$T_2 = 12$$ $\Rightarrow$ Da nach 4 h bereits 100 l ausgelaufen sind (a), ist diese Lösung phys. nicht plausibel.

Nach 2 h sind 60 l Öl ausgelaufen.

ZUSATZ AUFGABEN

Aufg. 1

a)



b) Der exakte Wert des Integrals ist

$$\int_0^1 \sqrt{x^3}\,dx = \int_0^1 x^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{2}{5}\cdot x^{\frac{5}{2}}\Big|_0^1 = \frac{2}{5}\cdot 1^{\frac{5}{2}} = \underline{\underline{0{,}4}}$$

c) Die Riemannsche Summe lautet $\sum_{i=1}^{4} f(x_i)\cdot\Delta x$

mit $\Delta x = 0{,}25$ und $x_1 = 0{,}125$, $x_2 = 0{,}375$, $x_3 = 0{,}625$ und $x_4 = 0{,}875$. Die Summe beträgt 0,3966... . Der Fehler ist somit kleiner als 0,004.

Aufg. 2

a) $f(x) = \cos(x) \Rightarrow F(x) = \sin(x) + C$

$$\int_0^{\pi/2} \cos(x)\,dx = \sin(x)\Big|_0^{\pi/2} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0) = 1 - 0 = \underline{\underline{1}}$$

b) $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow F(x) = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C$

$$\int_1^2 \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}\Big|_1^2 = \frac{2}{3}\left(2^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}\right) \simeq \underline{\underline{1{,}2189}}$$

c) $f(x) = x^2 - 6\cos(2x)$

$F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3\sin(2x) + C$ | Kettenregel !

$$\int_1^2 \left(x^2 - 6\cos(2x)\right)dx = \frac{1}{3}x^3 - 3\sin(2x)\Big|_1^2$$

$$\simeq 4{,}9371 - (-2{,}3946) = \underline{\underline{7{,}3317}}$$

d) $\int_0^2 \left(\frac{x}{2}+1\right)^4 dx$ Lsg. mittels linearer Substitution

$$\int_a^b f(mx+n)\,dx = \frac{1}{m}\int_{ma+n}^{mb+n} f(u)\,du \qquad m \neq 0,\quad m,n \in \mathbb{R}$$

$m=\frac{1}{2}$; $n=1$; $f(u)=u^4$; $a=0$; $b=2$

$ma+n = 1$; $mb+n = 2$

$$\int_0^2 \left(\frac{x}{2}+1\right)^4 dx = 2\int_1^2 u^4\,du = \frac{2}{5}\left[u^5\right]_1^2 = \frac{2}{5}\left(2^5-1^5\right) = \frac{2}{5}(32-1) = \underline{\underline{12{,}4}}$$

---

e) $\int_0^\pi x\cos x\,dx$ $\Rightarrow$ Lsg. mittels partieller Integration

$$\int x\cos x\,dx$$

$$= x\sin x - \int \sin x\,dx$$

$$= x\sin x + \cos x + C$$

$\int u'v\,dx = uv - \int v'u\,dx$

$v(x) = x \qquad u'(x) = \cos x$

$v'(x) = 1 \qquad u(x) = \sin x$

$$\Rightarrow \int_0^\pi x\cos x\,dx = \left[x\sin x + \cos x\right]_0^\pi = \underbrace{\pi\sin\pi}_{0} + \underbrace{\cos\pi}_{-1} - \cancel{0\sin 0} - \underbrace{\cos 0}_{1}$$

$$= -1-1 = \underline{\underline{-2}}$$

<u>Aufg. 3</u> gesucht ist die Lösung uneigentlicher Integrale.

a) $$\int_3^{\infty} 5x^{-2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_3^{b} 5x^{-2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[-5x^{-1}\right]_3^{b} =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{5}{b}+\frac{5}{3}\right) = \underline{\underline{\frac{5}{3}}}$$

b) $$\int_{-\infty}^{-1} x^{-2}\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^{-1} x^{-2}\,dx = \lim_{a\to-\infty}\left[-x^{-1}\right]_a^{-1} = \lim_{a\to-\infty}\left(1+\frac{1}{a}\right) = \underline{\underline{1}}$$

c) $$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^{\infty} x^{-\frac{1}{2}} = \lim_{b\to\infty}\left[2x^{\frac{1}{2}}\right]_1^{b} = \lim_{b\to\infty}\left(2\sqrt{b}-2\right) = \underline{\underline{\infty}}$$

Aufg. 4

$$A(x) = \int_0^x (3t^3 - 2t)\,dt$$

$$F(t) = \frac{3}{4}t^4 - t^2 + C$$

$$A(x) = F(x) - F(0) = \frac{3}{4}x^4 - x^2 \equiv 0$$

$$x^2\left(\frac{3}{4}x^2 - 1\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{x_1 = 0} \text{ (triviale Lösung)}$$

$$\frac{3}{4}x^2 = 1$$

$$\underline{x_{2,3} = \pm\sqrt{\frac{4}{3}}}$$