

Mathematische Grundlagen/Methoden der Geowissenschaften I

Lösungen zu Übung Differentialgleichungen 1. Ordnung:

Aufg. 1) Für den Gleichgewichtszustand gilt $dS/dt = 0$. Somit folgt aus Gl. (1.1)

$$Q_i S_i - (Q_i - F)S = 0$$

$$S = \frac{Q_i S_i}{Q_i - F} = 37,8125.$$

Aufg. 2) Gegebene DGL:

$$V \frac{dS}{dt} = Q_i S_i - (Q_i - F)S$$

1. Schritt: Trennung der Variablen:

$$\frac{V}{Q_i S_i + (F - Q_i)S} dS = dt$$

2. Schritt: Integration beider Seiten:

$$\int \frac{V}{Q_i S_i + (F - Q_i)S} dS = \int dt$$
$$\frac{V}{F - Q_i} \ln|Q_i S_i + (F - Q_i)S| = t + C_1$$

Durch Umgruppieren und Zusammenfassen von Konstanten erhält man die allg. Lösung der DGL:

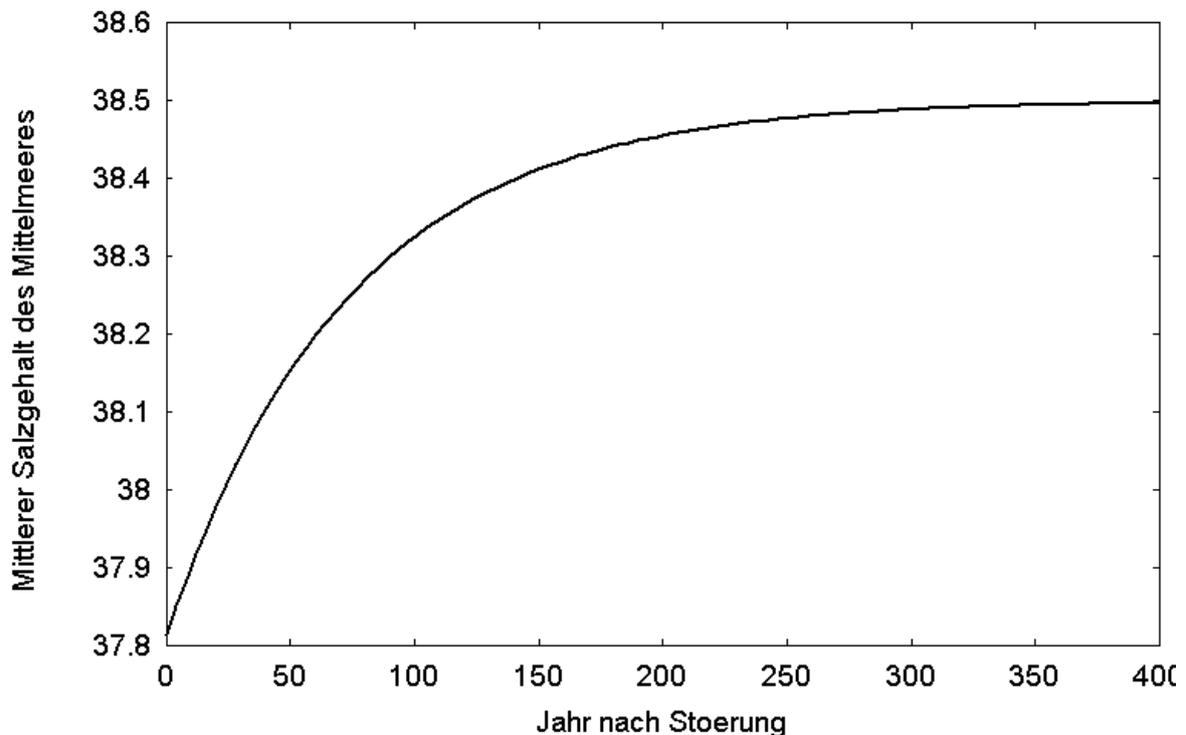
$$\ln|Q_i S_i + (F - Q_i)S| = \frac{(F - Q_i)t}{V} + \frac{(F - Q_i)C_1}{V}$$
$$\ln|Q_i S_i + (F - Q_i)S| = \frac{(F - Q_i)t}{V} + C_2$$
$$Q_i S_i + (F - Q_i)S = \exp\left(\frac{(F - Q_i)t}{V} + C_2\right) = \exp(C_2) \exp\left(\frac{(F - Q_i)t}{V}\right) = C_3 \exp\left(\frac{(F - Q_i)t}{V}\right)$$
$$S = \frac{1}{F - Q_i} \left[C_3 \exp\left(\frac{(F - Q_i)t}{V}\right) - Q_i S_i \right].$$

Aufg. 3.1) Zum Zeitpunkt $t = 0$ ergibt sich mit $S(0) = S_0 = 37,8125$ und $F_{neu} = 10 \cdot 10^4 \text{ m}^3/\text{s}$ für die Integrationskonstante C_3 :

$$C_3 = S_0(F_{neu} - Q_i) + Q_i S_i = 1134375 \text{ m}^3/\text{s}.$$

Hiermit ist die spezielle Lösung der DGL vollständig definiert.

Aufg. 3.2)



Nach der Störung (Zunahme von F auf F_{neu}) steigt der Salzgehalt zunächst rasch an und nähert sich dann immer langsamer einem neuen Gleichgewichtswert. Wie unter der Lösung zu Aufg. 1 beschrieben, kann dieser Wert berechnet werden; er beträgt $S_{neu} = 38,5$. Der Salzgehalt steigt also um $\Delta S = S_{neu} - S_0 = 38,5 - 37,8125 = 0,6875$ an. Ein gebräuchliches Maß für die Zeitskala, auf der sich eine Änderung vollzieht, ist die Zeit, in der $(1-1/e) \approx 63\%$ der gesamten Änderung passieren. Der entsprechende Salzgehalt ist $S_0 + (1-1/e) \cdot \Delta S \approx 38,24$; dieser Wert wird nach ca. 70 Jahren erreicht.

- Aufg. 4)**
- Wassermenge in einem Stausee
 - Schadstoffmenge in einem Grundwasserreservoir
 - CO_2 -Gehalt der Atmosphäre
 - Magmamenge in einer Magmakammer