Mathematische Methoden der Geowissenschaften I – Übung Integralrechnung

(Literatur: Weltner; Mathematik für Physiker, Bd. 1)

Aufgabe 1: Die Masse der Erde M lässt sich durch folgendes Integral beschreiben:

$$M = \int_0^R 4\pi r^2 \rho \, dr.$$

Darin ist r = 6370 km der Erdradius, ρ die Dichte und R der Abstand vom Erdmittelpunkt (in km). (Die Herleitung der Gleichung folgt im Sommersemester). Näherungsweise beträgt die mittlere Dichte 11000 kg m^{-3} im Erdkern und 4500 kg m^{-3} im Erdmantel. Die Kern-Mantel-Grenze liegt in einem Abstand von 3470 km vom Erdmittelpunkt. Wie groß ist die Masse der Erde? (Die Masse der Kruste kann hierbei vernachlässigt werden.)

Aufgabe 2: Aus einem defekten Öltank dringt Öl in einen Grundwasserleiter. In den ersten Stunden nach der Leckage wir die Abflussmenge regelmäßig gemessen. Anhand der Messwerte wurde folgender Zusammenhang zwischen der Abflussmenge, Q (in Liter pro Stunde) und der Zeit seit Beginn der Leckage, t (in Stunden) gefunden: $Q\,[\mathrm{L/h}] = 35 - 5t$.

(a) Bestimmen Sie den Ölverlust während der ersten vier Stunden nach Beginn der Leckage.
(b) Nach welcher Zeit T sind 60 Liter Öl ins Grundwasser gelangt?

Hausaufgabe 1: Gegeben sei die reelle Funktion $f(x) = \sqrt{x^3}$. **(a)** Zeichen Sie die Funktion $f(x)$ im Intervall $[0;3]$. **(b)** Berechnen Sie exakt das Integral $\int_0^1 f(x)\,dx$. **(c)** Nähern Sie das Integral durch eine Riemannsche Summe, indem Sie das Intervall [0;1] in 4 äquidistante Teilintervalle zerlegen. Wie groß ist der Fehler (d.h. die Differenz zwischen der exakten Lösung des Integrals und der Approximation durch die Riemannsche Summe)?

Hausaufgabe 2: Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale:

a) $\int_0^{\pi/2} \cos x \, dx$ b) $\int_1^2 \sqrt{x}\, dx$ c) $\int_1^2 (x^2 - 6\cos(2x))\, dx$ d) $\int_0^2 (\frac{x}{2}+1)^4\, dx$ e) $\int_0^{\pi} x \cdot \cos x \, dx$

Hausaufgabe 3: Berechnen Sie folgende unbestimmten Integrale:

a) $\int_3^{\infty} 5x^{-2} dx$ b) $\int_{-\infty}^{-1} x^{-2}\, dx$ c) $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$

Hausaufgabe 4: Berechnen Sie die Nullstellen der reellen Integralfunktion

$$A(x) = \int_0^x (3t^3 - 2t)\, dt\,.$$