Mathematische Grundlagen der Geowissenschaften I – WiSe 2014/15

Thema: Funktionen mehrerer Variablen, Partielle Ableitung

Literatur: Weltner, K. (2001) Mathematik für Physiker, Band 2, Springer Verlag.

Aufgabe 1:
Die Dichte ρ von Meerwasser mit Salzgehalt S und Temperatur T unter Atmosphärendruck (d.h. an der Ozeanoberfläche) lässt sich näherungsweise mittels der empirischen Gleichung

$$\rho(S, T) = 1000 + 0,8\,S - 0,07\,T\,(1 + 0,07\,T)$$

berechnen (Einheiten: T in $^\circ C$, ρ in kg m^{-3}; S ist definiert als g Salz/kg Wasser und ist daher dimensionslos).
a) Zeichnen Sie die Isopyknen 1024 kg m^{-3}, 1026 kg m^{-3} und 1028 kg m^{-3} in ein T-S-Diagramm (Abszisse: Salzgehalt von 30 bis 38; Ordinate: Temperatur von 0°C bis 20°C).
b) Betrachten Sie die Wassermassen A und B mit der Dichte $\rho = 1026$ kg m^{-3}. Wassermasse A besitzt einen Salzgehalt $S_A = 36$, Wassermasse B einen Salzgehalt $S_B = 33$. Bestimmen Sie die Temperaturen T_A und T_B der beiden Wassermassen.
c) Die Wassermassen A und B werden zu gleichen Anteilen (d.h. 50% A und 50% B) vermischt. Berechnen Sie Temperatur, Salzgehalt und Dichte der resultierenden neuen Wassermasse. Vergleichen Sie die Dichten – verblüfft Sie das Ergebnis?
d) Betrachten Sie nun die Wassermassen C und D mit Salzgehalt $S_C = S_D = 35$. Die Temperatur von Wassermasse C betrage $T_C = 0$°C, die von Wassermasse D $T_D = 20$°C. Berechnen Sie die Dichten ρ_C und ρ_D der beiden Wassermassen.
e) Beide Wassermassen werden erwärmt, so dass sich die Temperaturen T_C und T_D um jeweils 1°C erhöhen. Wie groß sind die resultierenden Dichteänderungen $\Delta\rho_C$ und $\Delta\rho_D$? Die Dichteänderung welcher Wassermasse ist betragsmäßig größer?
f) Überprüfen Sie Ihr Ergebnis durch Berechnung des thermischen Expansionskoeffizienten $-\frac{\partial\rho}{\partial T}$ bei 0°C und 20°C.

Aufgabe 2:
Berechnen Sie das dreidimensionale Vektorfeld

$$\vec{A}(x, y, z) = \left(x^2, y, x^2 + y^2 + z^2\right)$$

in den Punkten $P_1 = (1, 1, 1)$, $P_2 = (2, 0, 1)$ und $P_3 = (3, 2, 1)$. Nehmen Sie an, dass $\vec{A}$ ein (dimensionsloses) Windgeschwindigkeitsfeld beschreibt, und berechnen Sie die Beträge der Windgeschwindigkeiten in den Punkten P_1, P_2 und P_3. In welchem der drei Punkte weht der Wind am stärksten?

Aufgabe 3:
Berechnen Sie die partiellen Ableitungen f_{xx}, f_{xy}, f_{yx} und f_{yy} der Funktion

$$f(x, y) = 3\,e^{-yx}\,.$$

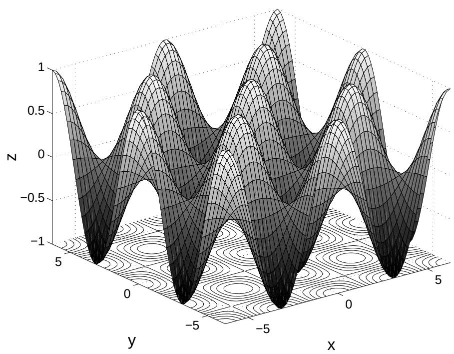
Aufgabe 4:

Ordnen Sie folgende Funktionen ihren Graphen zu:

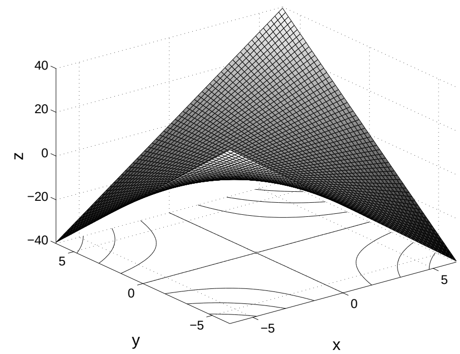
$$z(x,y) = x^2 + 2y^2\,, \qquad z(x,y) = x^3 + 50\sin(y)\,, \qquad z(x,y) = \sin(x)\cdot\sin^2(y)\,,$$

$$z(x,y) = \cos(x)\cdot\cos(y)\,, \qquad z(x,y) = \sin^2(x)\cdot e^{y/5}\,\sin(y)\,, \qquad z(x,y) = xy\,,$$

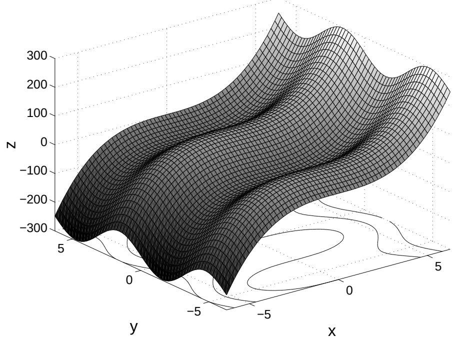
$$z(x,y) = -\frac{1}{x^2+y^2+3}\,, \qquad z(x,y) = -\left(x^2+y^2+2\right)^{-1}\,.$$



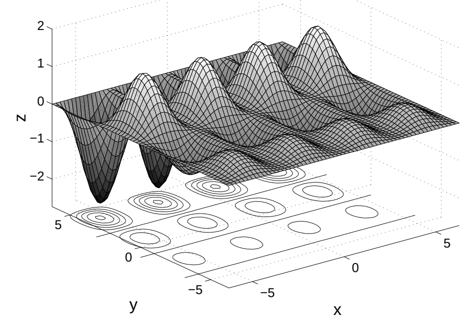
(a)



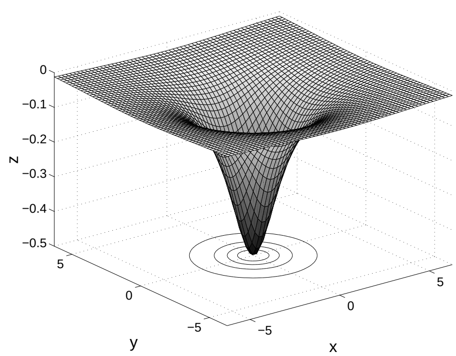
(b)



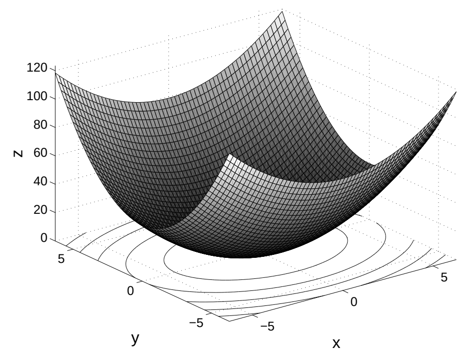
(c)



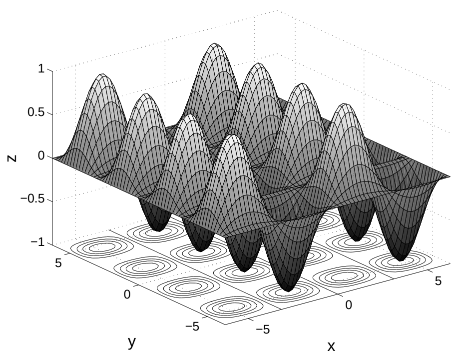
(d)



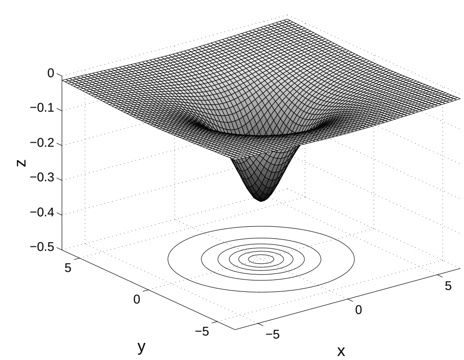
(e)



(f)



(g)



(h)