

Mathematisches Modellieren - Flugbahn eines Golfballes

Kattenhorn, Toprak, Tscherkaschin, Hillebrand

Fachbereich 1 - Physik / Elektrotechnik

13. Januar 2011



- 1 Einleitung
 - Motivation
- 2 Modellbildung
 - 6 Modelle
 - verschiedene Annahmen
- 3 Abschluss
 - vollständiges Modell
 - Fazit



Rekord-Abschlag

- Carl Hooper
- Texas Open 1992
- 719 Meter

Profi-Leistung

Maximal **350 Meter**



Einleitung

Motivation



Ziel der Modellierung

- Weite erreichbar
- sehr realistisch
- Wichtigster Faktor
- Reproduzierbarkeit



Annahmen:

- i) kein Luftwiderstand
- ii) kein Spin
- iii) keine Verformung
- iv) homogener Luftdruck
- v) ideal runder Ball
- vi) keine Kraft außer Anfangsbeschleunigung



Annahmen:

- i) kein Luftwiderstand
- ii) kein Spin
- iii) keine Verformung
- iv) homogener Luftdruck
- v) ideal runder Ball
- vi) keine Kraft außer Anfangsbeschleunigung



Annahmen:

- i) kein Luftwiderstand
- ii) kein Spin
- iii) keine Verformung
- iv) homogener Luftdruck
- v) ideal runder Ball
- vi) keine Kraft außer Anfangsbeschleunigung



Annahmen:

- i) kein Luftwiderstand
- ii) kein Spin
- iii) keine Verformung
- iv) homogener Luftdruck
- v) ideal runder Ball
- vi) keine Kraft außer Anfangsbeschleunigung



Annahmen:

- i) kein Luftwiderstand
- ii) kein Spin
- iii) keine Verformung
- iv) homogener Luftdruck
- v) ideal runder Ball
- vi) keine Kraft außer Anfangsbeschleunigung



Annahmen:

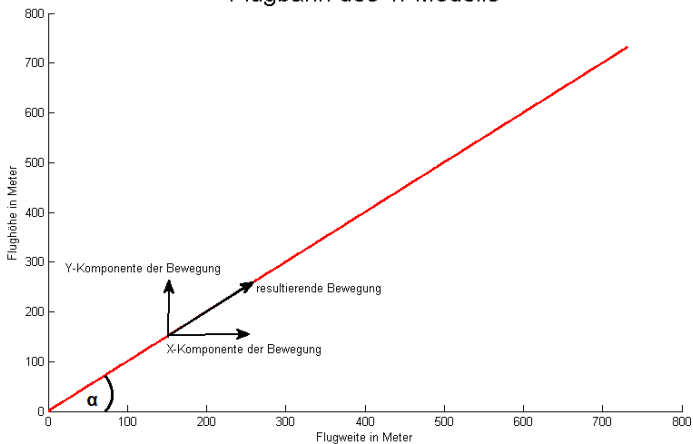
- i) kein Luftwiderstand
- ii) kein Spin
- iii) keine Verformung
- iv) homogener Luftdruck
- v) ideal runder Ball
- vi) keine Kraft außer Anfangsbeschleunigung



Modellbildung

1. Modell

Flugbahn des 1. Modells



Modellbildung

1. Modell

Für die Komponenten gilt

$$v_x = v_0 \cdot \cos \alpha_0$$

$$v_y = v_0 \cdot \sin \alpha_0$$

Abhängigkeiten

v_0 = Anfangsgeschwindigkeit

α_0 = Abschlagswinkel

Rückführung

- nicht realistisch
- unendlich Höhe und Reichweite

Neue Abhängigkeit

Erdbeschleunigung: $9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

- wirkt nur auf **Y-Komponente**



Rückführung

- nicht realistisch
- unendlich Höhe und Reichweite

Neue Abhängigkeit

Erdbeschleunigung: $9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

- wirkt nur auf **Y-Komponente**



Rückführung

- nicht realistisch
- unendlich Höhe und Reichweite

Neue Abhängigkeit

Erdbeschleunigung: $9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

- wirkt nur auf **Y-Komponente**



Rückführung

- nicht realistisch
- unendlich Höhe und Reichweite

Neue Abhängigkeit

Erdbeschleunigung: $9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

- wirkt nur auf **Y-Komponente**



Annahmen:

- i) kein Luftwiderstand
- ii) kein Spin
- iii) keine Verformung
- iv) homogener Luftdruck
- v) ideal runder Ball
- vi) **Erdbeschleunigung wirkt**



Allgemein gilt

$$a = \ddot{x} = \frac{v - v_0}{t}$$

$$v = \dot{x} = v_0 + at$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$



Formeln für das Modell

$$x = x_0 + v_0 t \cos \alpha_0$$

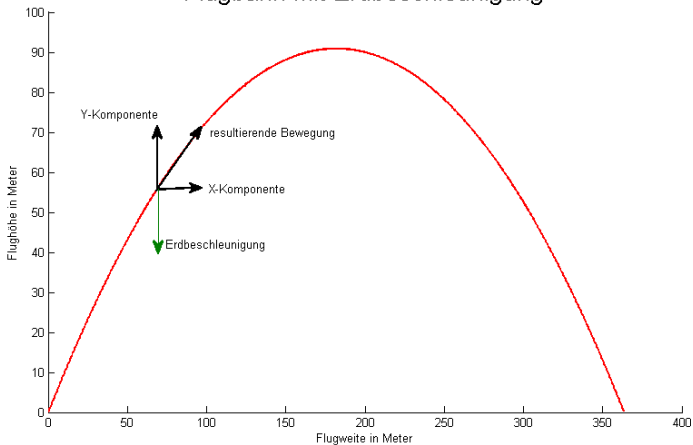
$$y = y_0 + v_0 t \sin \alpha_0 + \frac{1}{2} a t^2$$



Modellbildung

2. Modell

Flugbahn mit Erdbeschleunigung



Abschlagwinkel

$$x = \frac{v_0^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{g}$$

$$x = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\alpha}{g}$$

- Max. x bei $\sin 2\alpha = 1$
- $2\alpha = 90^\circ \Rightarrow \alpha = 45^\circ$



Abschlagwinkel

$$x = \frac{v_0^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{g}$$

$$x = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\alpha}{g}$$

- Max. x bei $\sin 2\alpha = 1$
- $2\alpha = 90^\circ \Rightarrow \alpha = 45^\circ$



Abschlagwinkel

$$x = \frac{v_0^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{g}$$

$$x = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\alpha}{g}$$

- Max. x bei $\sin 2\alpha = 1$
- $2\alpha = 90^\circ \Rightarrow \alpha = 45^\circ$



Modellbildung

2. Modell - Abschlagsgeschwindigkeit

- Was folgt daraus für uns?
- $\alpha = 45^\circ$, $x = 719m$, $g = 9,81 \frac{m}{s^2}$

Abschlagsgeschwindigkeit

$$x = \frac{v_0^2 \cdot \overbrace{\sin 2\alpha}^{1 \text{ mit } \alpha=45^\circ}}{g}$$

$$x = \frac{v_0^2}{g}$$

$$v_0 = \sqrt{x \cdot g}$$



Modellbildung

2. Modell - Abschlagsgeschwindigkeit

- Was folgt daraus für uns?
- $\alpha = 45^\circ$, $x = 719m$, $g = 9,81 \frac{m}{s^2}$

Abschlagsgeschwindigkeit

$$x = \frac{v_0^2 \cdot \overbrace{\sin 2\alpha}^{1 \text{ mit } \alpha=45^\circ}}{g}$$

$$x = \frac{v_0^2}{g}$$

$$v_0 = \sqrt{x \cdot g}$$



Modellbildung

2. Modell - Abschlagsgeschwindigkeit

- Was folgt daraus für uns?
- $\alpha = 45^\circ$, $x = 719m$, $g = 9,81 \frac{m}{s^2}$

Abschlagsgeschwindigkeit

$$x = \frac{v_0^2 \cdot \overbrace{\sin 2\alpha}^{1 \text{ mit } \alpha=45^\circ}}{g}$$

$$x = \frac{v_0^2}{g}$$

$$v_0 = \sqrt{x \cdot g}$$



Abschlagsgeschwindigkeit - Zahlenergebnis

$$\begin{aligned}v_0 &= \sqrt{x \cdot g} = \sqrt{719 \text{ m} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \\ &= 83,98 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 302,34 \frac{\text{km}}{\text{h}}\end{aligned}$$

- Ergebnis ist realistisch
- Abschlagswinkel ist für Golf **nicht** realistisch
- 8° bis 15° machbar, max 20° durch Schlägerform



Abschlagsgeschwindigkeit - Zahlenergebnis

$$\begin{aligned}v_0 &= \sqrt{x \cdot g} = \sqrt{719 \text{ m} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \\ &= 83,98 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 302,34 \frac{\text{km}}{\text{h}}\end{aligned}$$

- Ergebnis ist realistisch
- Abschlagswinkel ist für Golf **nicht** realistisch
- 8° bis 15° machbar, max 20° durch Schlägerform



Abschlagsgeschwindigkeit - Zahlenergebnis

$$\begin{aligned}v_0 &= \sqrt{x \cdot g} = \sqrt{719 \text{ m} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \\ &= 83,98 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 302,34 \frac{\text{km}}{\text{h}}\end{aligned}$$

- Ergebnis ist realistisch
- Abschlagswinkel ist für Golf **nicht** realistisch
- 8° bis 15° machbar, max 20° durch Schlägerform



Abschlagsgeschwindigkeit - Zahlenergebnis

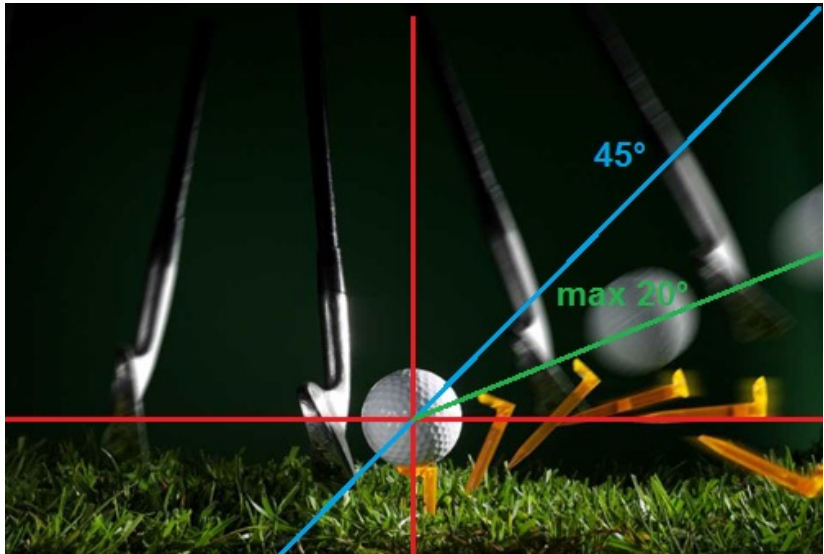
$$\begin{aligned}v_0 &= \sqrt{x \cdot g} = \sqrt{719 \text{ m} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \\ &= 83,98 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 302,34 \frac{\text{km}}{\text{h}}\end{aligned}$$

- Ergebnis ist realistisch
- Abschlagswinkel ist für Golf **nicht** realistisch
- 8° bis 15° machbar, max 20° durch Schlägerform



Modellbildung

2. Modell - Abschlagswinkel



Modellbildung

2. Modell - Abschlagswinkel

$$\alpha = 11^\circ, x = 719m, g = 9,81 \frac{m}{s^2}$$

Abschlagsgeschwindigkeit - Zahlenergebnis

$$\begin{aligned}v_0 &= \sqrt{\frac{x \cdot g}{\sin 2\alpha}} = \sqrt{\frac{719m \cdot 9,81 \frac{m}{s^2}}{\sin 22^\circ}} \\ &= 137,2 \frac{m}{s} = 494 \frac{km}{h}\end{aligned}$$

- Geschwindigkeit ist unrealistisch
- neue Überlegung:

Erhöhte Abschlagsposition



$$\alpha = 11^\circ, x = 719m, g = 9,81 \frac{m}{s^2}$$

Abschlagsgeschwindigkeit - Zahlenergebnis

$$\begin{aligned}v_0 &= \sqrt{\frac{x \cdot g}{\sin 2\alpha}} = \sqrt{\frac{719m \cdot 9,81 \frac{m}{s^2}}{\sin 22^\circ}} \\ &= 137,2 \frac{m}{s} = 494 \frac{km}{h}\end{aligned}$$

- Geschwindigkeit ist unrealistisch
- neue Überlegung:

Erhöhte Abschlagsposition



$$\alpha = 11^\circ, x = 719m, g = 9,81 \frac{m}{s^2}$$

Abschlagsgeschwindigkeit - Zahlenergebnis

$$\begin{aligned} v_0 &= \sqrt{\frac{x \cdot g}{\sin 2\alpha}} = \sqrt{\frac{719m \cdot 9,81 \frac{m}{s^2}}{\sin 22^\circ}} \\ &= 137,2 \frac{m}{s} = 494 \frac{km}{h} \end{aligned}$$

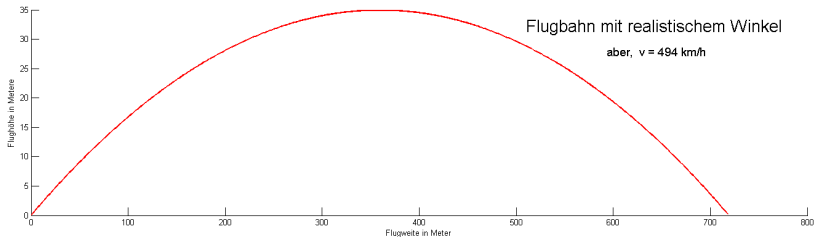
- Geschwindigkeit ist unrealistisch
- neue Überlegung:

Erhöhte Abschlagsposition



Modellbildung

2. Modell - Abschlagswinkel



Annahmen:

- i) kein Luftwiderstand
- ii) kein Spin
- iii) keine Verformung
- iv) homogener Luftdruck
- v) ideal runder Ball
- vi) Erdbeschleunigung wirkt
- vii) **Erhöhter Abschlagsort**

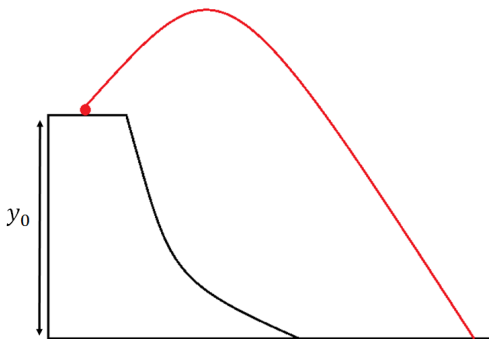


Modellbildung

3. Modell - Erhöhter Abschlagsort

Neue Abhängigkeit

$$y = \underline{y_0} + v_0 t \sin \alpha + \frac{1}{2} g t^2$$



Flugweite in Abhängigkeit von y_0

$$x = v_0 \cdot \cos \alpha \cdot \left(\sqrt{\left(\frac{v_0 \sin \alpha}{g} \right)^2 + \frac{2y_0}{g}} + \frac{v_0 \sin \alpha}{g} \right)$$

- α variiert zwischen 8° und 15°
- $v_0 = 80 \frac{m}{s}$
- $g = 9,81 \frac{m}{s^2}$
- $y_0 = ?$, damit v_0 realistisch bleibt.



Flugweite in Abhängigkeit von y_0

$$x = v_0 \cdot \cos \alpha \cdot \left(\sqrt{\left(\frac{v_0 \sin \alpha}{g} \right)^2 + \frac{2y_0}{g}} + \frac{v_0 \sin \alpha}{g} \right)$$

- α variiert zwischen 8° und 15°
- $v_0 = 80 \frac{m}{s}$
- $g = 9,81 \frac{m}{s^2}$
- $y_0 = ?$, damit v_0 realistisch bleibt.



Flugweite in Abhängigkeit von y_0

$$x = v_0 \cdot \cos \alpha \cdot \left(\sqrt{\left(\frac{v_0 \sin \alpha}{g} \right)^2 + \frac{2y_0}{g}} + \frac{v_0 \sin \alpha}{g} \right)$$

- α variiert zwischen 8° und 15°
- $v_0 = 80 \frac{m}{s}$
- $g = 9,81 \frac{m}{s^2}$
- $y_0 = ?$, damit v_0 realistisch bleibt.



Flugweite in Abhängigkeit von y_0

$$x = v_0 \cdot \cos \alpha \cdot \left(\sqrt{\left(\frac{v_0 \sin \alpha}{g} \right)^2 + \frac{2y_0}{g}} + \frac{v_0 \sin \alpha}{g} \right)$$

- α variiert zwischen 8° und 15°
- $v_0 = 80 \frac{m}{s}$
- $g = 9,81 \frac{m}{s^2}$
- $y_0 = ?$, damit v_0 realistisch bleibt.



Flugweite in Abhängigkeit von y_0

$$x = v_0 \cdot \cos \alpha \cdot \left(\sqrt{\left(\frac{v_0 \sin \alpha}{g} \right)^2 + \frac{2y_0}{g}} + \frac{v_0 \sin \alpha}{g} \right)$$

- α variiert zwischen 8° und 15°
- $v_0 = 80 \frac{m}{s}$
- $g = 9,81 \frac{m}{s^2}$
- $y_0 = ?$, damit v_0 realistisch bleibt.

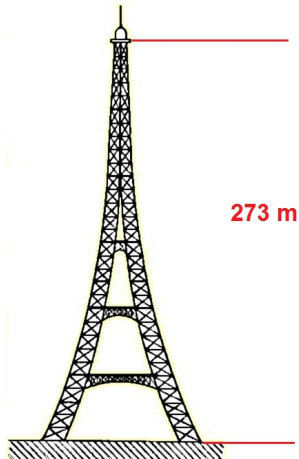


Modellbildung

3. Modell - Erhöhter Abschlagsort

y_0 -Werte für verschiedene α

Winkel α	y_0 -Wert
8°	303 m
9°	294 m
10°	284 m
11°	276 m
12°	267 m
13°	259 m
14°	251 m
15°	243 m



Zwischenergebnis

- 300 Meter für y_0 sind unrealistisch
- 719 Meter nicht erreichbar
- nur mit Spin und Wind
- nächste Annahme:
Luftwiderstand



Zwischenergebnis

- 300 Meter für y_0 sind unrealistisch
- 719 Meter nicht erreichbar
- nur mit Spin und Wind
- nächste Annahme:
Luftwiderstand



Zwischenergebnis

- 300 Meter für y_0 sind unrealistisch
- 719 Meter nicht erreichbar
- nur mit Spin und Wind
- nächste Annahme:
Luftwiderstand



Zwischenergebnis

- 300 Meter für y_0 sind unrealistisch
- 719 Meter nicht erreichbar
- nur mit Spin und Wind
- nächste Annahme:
Luftwiderstand



Annahmen:

- i) **mit Luftwiderstand**
- ii) kein Spin
- iii) keine Verformung
- iv) homogener Luftdruck
- v) ideal runder Ball
- vi) Erdbeschleunigung wirkt
- vii) Erhöhter Abschlagsort



Flugbahn mit Luftwiderstand

- Bremsverzögerung abhängig von v_m und dem k -Wert
- v_m , Momentangeschwindigkeit
- Flugbahn muss in kleine Intervalle zerlegt werden



Flugbahn mit Luftwiderstand

- Bremsverzögerung abhängig von v_m und dem k -Wert
- v_m , Momentangeschwindigkeit
- Flugbahn muss in kleine Intervalle zerlegt werden



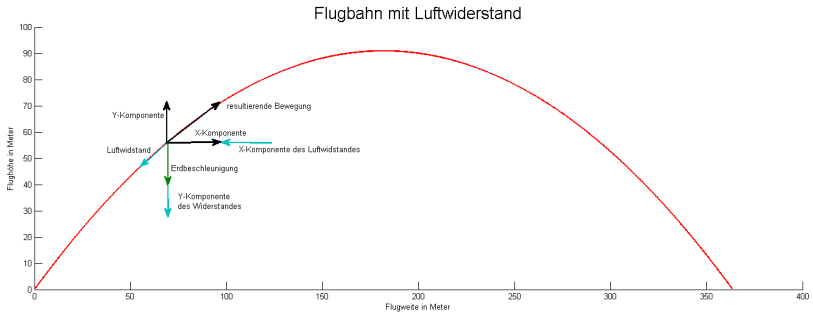
Flugbahn mit Luftwiderstand

- Bremsverzögerung abhängig von v_m und dem k -Wert
- v_m , Momentangeschwindigkeit
- Flugbahn muss in kleine Intervalle zerlegt werden



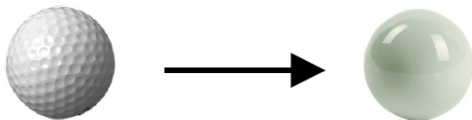
Modellbildung

4. Modell - Mit Luftwiderstand



Der k-Wert

- Widerstandsbeiwert c_D
- Dichte ρ des Mediums
- Masse m des Körpers
- Querschnittsfläche A des Körpers



Neue Abhängigkeiten

c_D -Wert, **Verhalten des Balls in der Luft**

k , **Abbremsfaktor**

a_{Br} , **Bremsverzögerung**

Formeln

$$k = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{c_D \cdot \rho \cdot A}{m} \right)$$
$$a_{Br} = -k \cdot v_m^2$$



Modellbildung

4. Modell - Mit Luftwiderstand

Neue Abhängigkeiten

c_D -Wert, **Verhalten des Balls in der Luft**

k , **Abbremsfaktor**

a_{Br} , **Bremsverzögerung**

Formeln

$$k = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{c_D \cdot \rho \cdot A}{m} \right)$$

$$a_{Br} = -k \cdot v_m^2$$



$$c_D = 0,45, \rho = 1,2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, r = 0,021\text{m}, m = 0,045\text{kg}$$

Berechnung des k-Wertes

$$\begin{aligned}k &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{c_D \cdot \rho \cdot \pi \cdot r^2}{m} \right) \\&= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{0,45 \cdot 1,2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \pi \cdot (0,021\text{m})^2}{0,045\text{kg}} \right) \\&= 8,313 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{m}}\end{aligned}$$



Für die horizontale Bremsverzögerung a_x gilt dann:

Formel für X-Richtung

$$a_x = -k \cdot v \cdot v_x$$

Formel für gesamte Bewegung in X-Richtung

$$x = x_0 + v_0 \cos \alpha_0 t + \frac{1}{2}(a_x)t^2$$



Für die horizontale Bremsverzögerung a_x gilt dann:

Formel für X-Richtung

$$a_x = -k \cdot v \cdot v_x$$

Formel für gesamte Bewegung in X-Richtung

$$x = x_0 + v_0 \cos \alpha_0 t + \frac{1}{2}(a_x)t^2$$

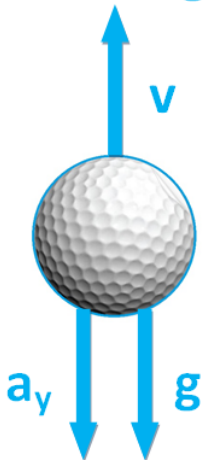


Modellbildung

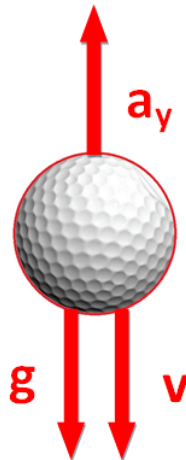
4. Modell - Mit Luftwiderstand

Für die Y-Richtung gilt

Aufstieg



Fall



Modellbildung

4. Modell - Mit Luftwiderstand

Formeln für die Y-Richtung

$$a_y = \begin{cases} -k \cdot v \cdot v_y & , \text{ gilt für Aufstiegsphase} \\ +k \cdot v \cdot v_y & , \text{ gilt für Fallphase} \end{cases}$$

Formel für gesamte Bewegung in Y-Richtung

$$y = \begin{cases} y_0 + v_0 t \sin \alpha_0 + \frac{1}{2}(g - a_y)t^2 & , \text{ Aufstiegsphase} \\ y_0 + v_0 t \sin \alpha_0 + \frac{1}{2}(g + a_y)t^2 & , \text{ Fallphase} \end{cases}$$



Formeln für die Y-Richtung

$$a_y = \begin{cases} -k \cdot v \cdot v_y & , \text{ gilt für Aufstiegsphase} \\ +k \cdot v \cdot v_y & , \text{ gilt für Fallphase} \end{cases}$$

Formel für gesamte Bewegung in Y-Richtung

$$y = \begin{cases} y_0 + v_0 t \sin \alpha_0 + \frac{1}{2}(g - a_y)t^2 & , \text{ Aufstiegsphase} \\ y_0 + v_0 t \sin \alpha_0 + \frac{1}{2}(g + a_y)t^2 & , \text{ Fallphase} \end{cases}$$



Berechnung der Flugbahn mit Luftwiderstand

- Bisherige Kenntnisse anwenden
- $\alpha = 10^\circ$, $v_0 = 80 \frac{m}{s}$
- Iteratives Berechnungsverfahren
- Berechnung mit MatLab



Berechnung der Flugbahn mit Luftwiderstand

- Bisherige Kenntnisse anwenden
- $\alpha = 10^\circ$, $v_0 = 80 \frac{m}{s}$
- Iteratives Berechnungsverfahren
- Berechnung mit MatLab



Berechnung der Flugbahn mit Luftwiderstand

- Bisherige Kenntnisse anwenden
- $\alpha = 10^\circ$, $v_0 = 80 \frac{m}{s}$
- Iteratives Berechnungsverfahren
- Berechnung mit MatLab



Berechnung der Flugbahn mit Luftwiderstand

- Bisherige Kenntnisse anwenden
- $\alpha = 10^\circ$, $v_0 = 80 \frac{m}{s}$
- Iteratives Berechnungsverfahren
- Berechnung mit MatLab



Formeln zum Luftwiderstand

$$a_{xn+1} = k \cdot v_n \cdot v_{xn}$$

$$a_{yn+1} = k \cdot v_n \cdot v_{yn}$$

$$v_{xn+1} = v_{xn} + a_{xn+1} \cdot \Delta t$$

$$v_{yn+1} = v_{yn} + a_{yn+1} \cdot \Delta t$$

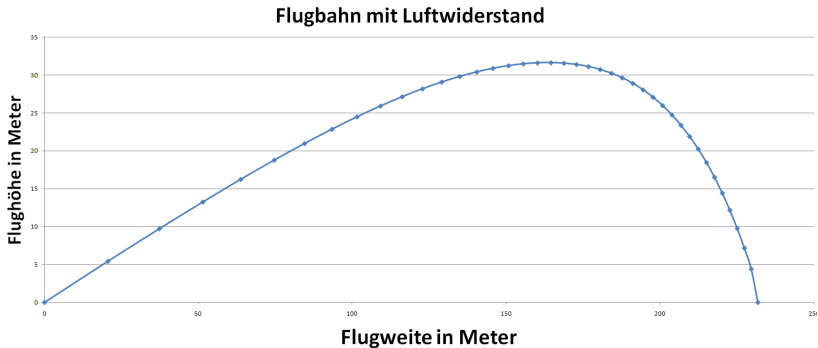
$$x_{n+1} = x_n + v_{xn} \cdot \Delta t + \frac{1}{2} a_{xn+1} \cdot \Delta t^2$$

$$y_{n+1} = y_n + v_{yn} \cdot \Delta t + \frac{1}{2} a_{yn+1} \cdot \Delta t^2$$



Modellbildung

4. Modell - Mit Luftwiderstand



Zwischenergebnis

- Luftwiderstand verringert maximale Weite
- keine Parabel sondern ballistische Kurve
- 719 Meter mit $825 \frac{m}{s}$, $\alpha = 10^\circ$ erreichbar
- nicht realistisch
- Neue Annahme:
Spin



Zwischenergebnis

- Luftwiderstand verringert maximale Weite
- keine Parabel sondern ballistische Kurve
- 719 Meter mit $825 \frac{m}{s}$, $\alpha = 10^\circ$ erreichbar
- nicht realistisch
- Neue Annahme:
Spin



Zwischenergebnis

- Luftwiderstand verringert maximale Weite
- keine Parabel sondern ballistische Kurve
- 719 Meter mit $825 \frac{m}{s}$, $\alpha = 10^\circ$ erreichbar
- nicht realistisch
- Neue Annahme:
Spin



Zwischenergebnis

- Luftwiderstand verringert maximale Weite
- keine Parabel sondern ballistische Kurve
- 719 Meter mit $825 \frac{m}{s}$, $\alpha = 10^\circ$ erreichbar
- nicht realistisch
- Neue Annahme:
Spin



Zwischenergebnis

- Luftwiderstand verringert maximale Weite
- keine Parabel sondern ballistische Kurve
- 719 Meter mit $825 \frac{m}{s}$, $\alpha = 10^\circ$ erreichbar
- nicht realistisch
- Neue Annahme:
Spin



Annahmen:

- i) mit Luftwiderstand
- ii) **mit Spin, konstant**
- iii) keine Verformung
- iv) homogener Luftdruck
- v) ideal runder Ball
- vi) Erdbeschleunigung wirkt
- vii) Erhöhter Abschlagsort



Spin

- “echte” Wirkung sehr komplex
- Reduzierung auf Beschleunigung
- Abhängig von Auftriebsbeiwert c_L
- größere Flughöhe \Rightarrow größere Flugweite



Spin

- “echte“ Wirkung sehr komplex
- Reduzierung auf Beschleunigung
- Abhängig von Auftriebsbeiwert c_L
- größere Flughöhe \Rightarrow größere Flugweite



Spin

- “echte“ Wirkung sehr komplex
- Reduzierung auf Beschleunigung
- Abhängig von Auftriebsbeiwert c_L
- größere Flughöhe \Rightarrow größere Flugweite



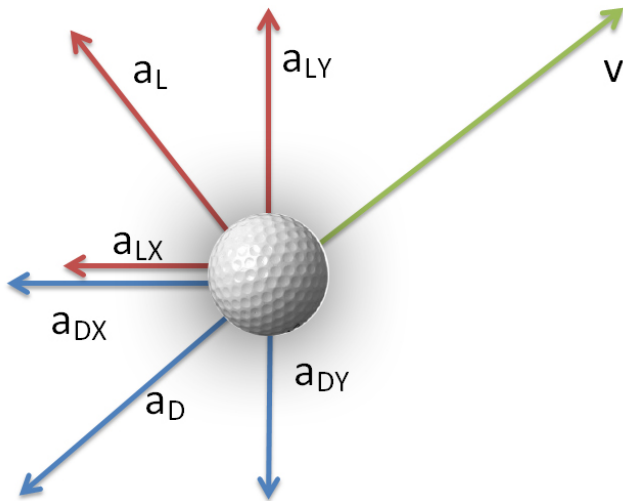
Spin

- “echte“ Wirkung sehr komplex
- Reduzierung auf Beschleunigung
- Abhängig von Auftriebsbeiwert c_L
- größere Flughöhe \Rightarrow größere Flugweite

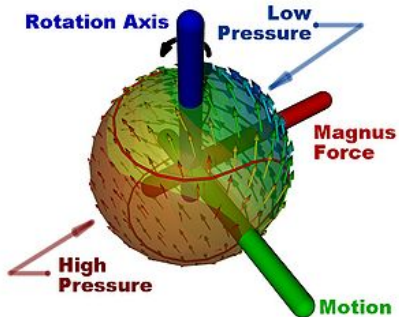


Modellbildung

5. Modell - Mit Spin

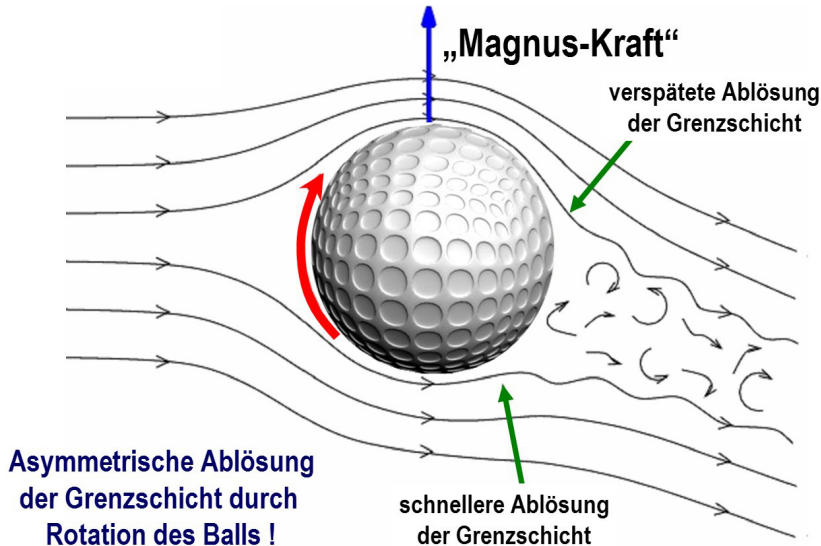


Magnus-Effekt



Modellbildung

5. Modell - Mit Spin



Spin

Neue Abhängigkeit

a_{x1}, a_{y1} , **Beschleunigung durch Spin**

Formeln für den Spin

$$j = -\frac{\rho \cdot A}{2 \cdot m_B}$$

$$a_{xn+1} = j \cdot v_n \cdot (v_{xn} \cdot c_D + v_{yn} \cdot c_L)$$

$$a_{yn+1} = j \cdot v_n \cdot (v_{yn} \cdot c_D - v_{xn} \cdot c_L) - g$$



Spin

Neue Abhängigkeit

a_{x1}, a_{y1} , **Beschleunigung durch Spin**

Formeln für den Spin

$$j = -\frac{\rho \cdot A}{2 \cdot m_B}$$

$$a_{xn+1} = j \cdot v_n \cdot (v_{xn} \cdot c_D + v_{yn} \cdot c_L)$$

$$a_{yn+1} = j \cdot v_n \cdot (v_{yn} \cdot c_D - v_{xn} \cdot c_L) - g$$



Formel für gesamte Bewegung in X-Richtung

$$x = x_0 + v_0 \cos \alpha_0 t + \frac{1}{2}(a_x)t^2$$

Formel für gesamte Bewegung in Y-Richtung

$$y = y_0 + v_0 t \sin \alpha_0 + \frac{1}{2}(a_y)t^2$$



Modellbildung

5. Modell - Mit Spin

Formel für gesamte Bewegung in X-Richtung

$$x = x_0 + v_0 \cos \alpha_0 t + \frac{1}{2}(a_x)t^2$$

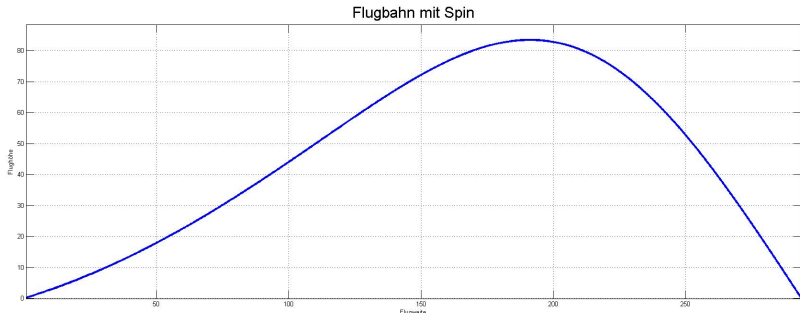
Formel für gesamte Bewegung in Y-Richtung

$$y = y_0 + v_0 t \sin \alpha_0 + \frac{1}{2}(a_y)t^2$$



Modellbildung

5. Modell - Mit Spin



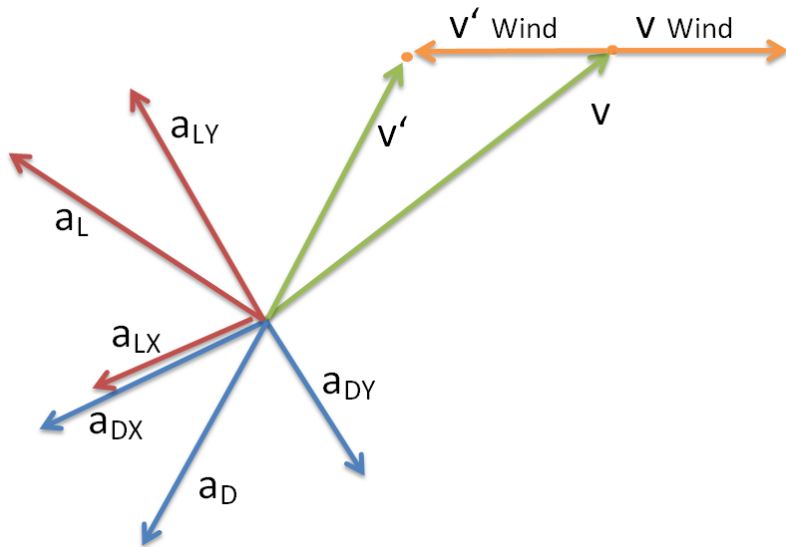
Annahmen:

- i) mit Luftwiderstand
- ii) mit Spin, konstant
- iii) **mit Wind**
- iv) keine Verformung
- v) homogener Luftdruck
- vi) ideal runder Ball
- vii) Erdbeschleunigung wirkt
- viii) Erhöhter Abschlagsort



Modellbildung

6. Modell - Mit Wind



Modellbildung

6. Modell - Mit Wind

- höhenabhängig
- Wirkung abhängig von v_M

Formeln für Wind

$$a'_{xn+1} = jv'_n(v'_{xn}c_D + v'_{yn}c_L)$$

$$a'_{yn+1} = jv'_n(v'_{yn}c_D + v'_{xn}c_L) - g$$

$$x_{n+1} = x_n + v_{xn}\Delta t + \frac{1}{2}a'_{xn+1}\Delta t^2$$

$$y_{n+1} = y_n + v_{yn}\Delta t + \frac{1}{2}a'_{yn+1}\Delta t^2$$



Modellbildung

6. Modell - Mit Wind

- höhenabhängig
- Wirkung abhängig von v_M

Formeln für Wind

$$a'_{xn+1} = jv'_n(v'_{xn}c_D + v'_{yn}c_L)$$

$$a'_{yn+1} = jv'_n(v'_{yn}c_D + v'_{xn}c_L) - g$$

$$x_{n+1} = x_n + v_{xn}\Delta t + \frac{1}{2}a'_{xn+1}\Delta t^2$$

$$y_{n+1} = y_n + v_{yn}\Delta t + \frac{1}{2}a'_{yn+1}\Delta t^2$$



Modellbildung

6. Modell - Mit Wind

- höhenabhängig
- Wirkung abhängig von v_M

Formeln für Wind

$$a'_{xn+1} = jv'_n(v'_{xn}c_D + v'_{yn}c_L)$$

$$a'_{yn+1} = jv'_n(v'_{yn}c_D + v'_{xn}c_L) - g$$

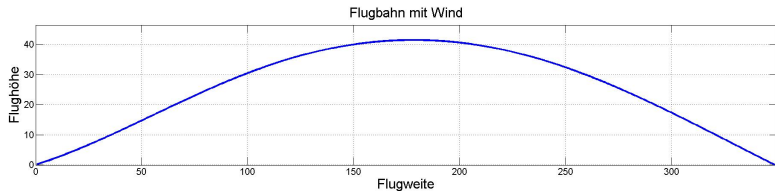
$$x_{n+1} = x_n + v_{xn}\Delta t + \frac{1}{2}a'_{xn+1}\Delta t^2$$

$$y_{n+1} = y_n + v_{yn}\Delta t + \frac{1}{2}a'_{yn+1}\Delta t^2$$



Modellbildung

6. Modell - Mit Wind



Abschließendes Modell

- **Erdbeschleunigung**
- Anhöhe
- Luftwiderstand
- Spin
- Wind



Abschließendes Modell

- Erdbeschleunigung
- Anhöhe
- Luftwiderstand
- Spin
- Wind



Abschließendes Modell

- **Erdbeschleunigung**
- **Anhöhe**
- **Luftwiderstand**
- Spin
- Wind



Abschließendes Modell

- Erdbeschleunigung
- Anhöhe
- Luftwiderstand
- Spin
- Wind



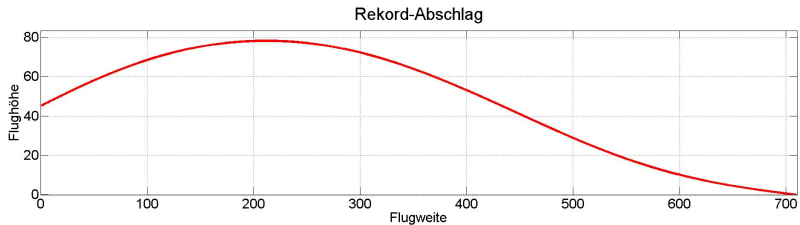
Abschließendes Modell

- Erdbeschleunigung
- Anhöhe
- Luftwiderstand
- Spin
- Wind



Modellbildung

7. Modell - Ein Mal alles, bitte!



Zusammenfassung

- Annäherung komplexer Effekte
- Zustandekommen eines sinnvollen Modells
- Flugbahn sieht aus wie im Golfsport



Zusammenfassung

- Annäherung komplexer Effekte
- Zustandekommen eines sinnvollen Modells
- Flugbahn sieht aus wie im Golfsport



Zusammenfassung

- Annäherung komplexer Effekte
- Zustandekommen eines sinnvollen Modells
- Flugbahn sieht aus wie im Golfsport



Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!



Für Fragen stehen wir gerne zur Verfügung!

