# Höhere Mathematik I - Skript

Theodor Hillebrand

16. November 2010

## Inhaltsverzeichnis



## 1 Mengen und Abbildungen

Mengenlehre - Georg Cantor (1845 - 1918)

### 1.1 Einführung, Definition

Was ist eine Menge?

### Definition 1.1

Cantor: Menge ist eine Zusammenfassung bekannter, wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder Denkens, welche die Elemente der Menge genannt werden, zu eine Ganzen.

#### Beschreibung von Mengen und Bezeichnungen

Mit A,B,C, ... Mengen
a,b,c, ... Elemente der Menge

- gehört ein Element $x$ zur Menge $A$ so schreibt man
  $x \in A$
  gehört $y$ nicht zur Menge $A$, dann schreibt man $y \notin A$
- Sind $A$ und $B$ zwei Mengen, so heißen sie gleich, $A = B$, wenn beide **genau** die gleichen Elemente enthalten
- Sind zwei Mengen $A$ und $B$ nicht gleich dann schreibt man $A \neq B$

- Die leere Menge, die kein Element enthält bezeichnet man mit $\emptyset$ .

Man kann Mengen auf zwei verschiedene Arten beschreiben:

a) Durch Aufzählung der Elemente einer Menge

Beispiel:
$A := \{11,22,33,44,55,66,77\}$
wobei := bedeutet “ist definiert durch“
(=:)
{ } - Mengenklammern
$44 \in A, 11.5 \notin A$
$A$ - zweistellige Schnapszahlen

$B := \{AP, KS, TK, FP, PK, OS\}$
ist die Menge der Tutoren zur Vorlesung.

b) durch Angebae von charakteristischen Eingenschaften

Beispiele:

i) A = { n | n ist eine ganze Zahl,$1 \leq n \leq 8$ }
wobei die Bestandteile dieser Form sind wie folgt zu lesen

| | |
|---|---|
| A = | Ä ist |
| { n | die Menge aller n |
| \| | für die gilt |
| n ist eine ganze Zahl | Vorschrift |
| , | für die gilt |
| $1 \leq n \leq 8$ | die größer-gleich sind als 1 und kleiner-gleich als 8 |
| } | " |

Also, A = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 }

ii) $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} | p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} - \{0\}\}$
$\mathbb{Q}$ - Menge der rationalen Zahlen

iii) B = { x | x ist durch 3 teilbar, $11 \leq x \leq 22$ }
B = { 12, 15, 18, 21 }

## Definition 1.2

Sind $A$ und $B$ zwei Mengen, so heißt $A$ Teilmenge von $B$. ($A \subset B$ oder $B \supset A$), wenn **jedes** Element von $A$ auch ein Element von $B$ ist.
Oder: $\forall x \in A \Rightarrow x \in B$
Ist $A$ eine Menge, so heißt die Menge aller Teilmengen von $A$ die Potenzmenge von $A$, $P(A)$

Beispiele

i) A = {1, 2, 3}, B = {0, 1, 2, 3, 4 }
Klar, $A \supset B$

ii) A = {1, 2 }
P(A) = $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{$1,2$\}\}$
$\Rightarrow A \supset P(A)$
$A = B \Leftrightarrow A \supset BundB \supset AA \subseteq B$

## Definition 1.3

Für zwei Mengen $A$ und $B$ bezeichnet man mit $A \cap B$ den Durchschnitt von $A$ und $B$. [Schnittmenge]
$A \cap B$ besteht aus Elementen, die sowohl zu $A$ als auch zu $B$ gehören.
$A \cap B := \{x | x \in A \wedge x \in B\}$
$A$ und $B$ heißen disjunkt, wenn $A \cap B = \emptyset$

## Definition 1.4

Die Vereinigung $A \cup B$ ist die menge der Elemente die in $A$ oder in $B$ enthalten sind.
$A \cup B := \{x | x \in A \vee x \notin B\}$

## Definition 1.5

Die Differenzmengen $A \setminus B$ oder $A - B$ der Mengen $A$ und $B$ ist die Menge der Elemente von $A$, die nicht in $B$ Enthalten sind.
$A \setminus B := \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$
Ist $B \subset A$, so heißt $A \setminus B$ auch das Komplement von $B$ in $A$.
Bezeichnung: $\bar{B} oder B^c$

### Definition 1.6

Mit $A \times B$ (Kreuzprodukt) bezeichnet man die Menge aller Paare (a, b)
mit $a \in A$, $b \in B$
$A \times B = \{(a, b)|a \in A, b \in B\}$
Beispiele: $A = \{1,2,3,4\}, B = \{3,4,5\}$
$A \cap B = \{3,4\}$
$A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$
$A \setminus B = \{1,2\}$ in $A$ nicht in $B$
$A \times B = \{(1,3),(1,4),(1,5),(2,3),(2,4),...\}$ jedes Element mit jedem der anderen Menge

### Venn-Diagramme (Graphische Darstellung)

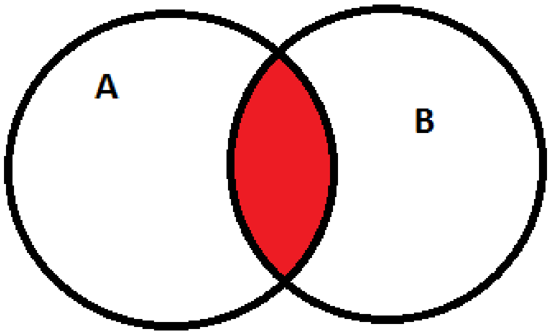


Abbildung 1: $A \cap B$ Schnittmenge

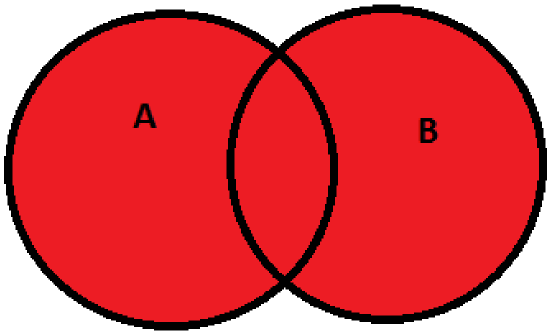


Abbildung 2: $A \cup B$ Vereinigung

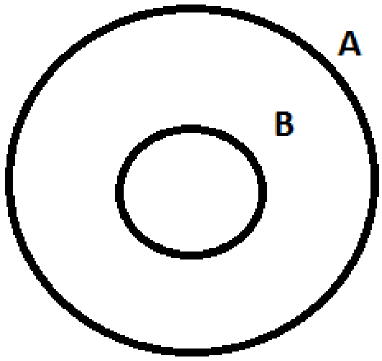


Abbildung 3: $B \subset A$

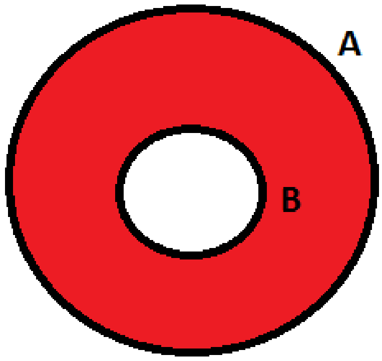


Abbildung 4: $A \setminus B$ oder $\bar{B}$ in $A$ Komplement von $A$ in $B$

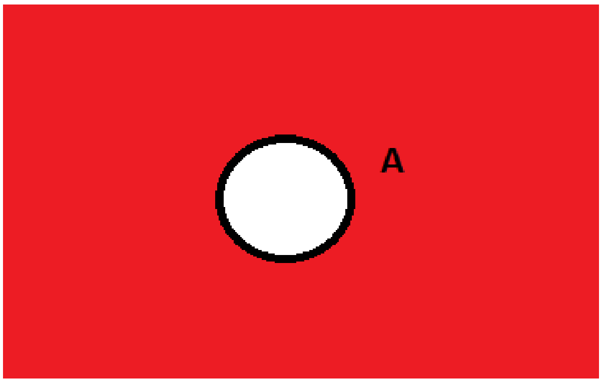


Abbildung 5: $\bar{A}$ oder $A^c$ , alles was nicht in $A$ ist

## Beispiele:

i) $\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ enthält alle reellen Zahlenpaare
Zweidimensionale Ebene, Kreuzprodukt von zwei Mengen (Koordinatensystem)

ii) $\mathbb{R}^3 := \mathbb{R}(x) \times \mathbb{R}(y) \times \mathbb{R}(z)$
Dreidimensionaler Raum

## Bemerkungen

$A \times B$ nennt man das 2-Fache kartesische Produkt.
n-fache kartesische Produkt definiert man als

$$A_1 \times A_2 \times A_3 \times .... \times A_n := \prod_{i=1}^{n} A_i$$
$$= \{(a_1, a_2, a_3, ..., a_n) | a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, ..., a_n \in A_n\}$$

# 1.2 Rechenregeln für Mengenoperationen

## Satz 1.6

Seien $A, B, C$ Mengen
Dann gilt:

#### Kommutativ-Gesetzt

a) $A \cup B = B \cup A$

b) $A \cap B = B \cap A$

#### Assoziativ-Gesetzt

c) $(A \cup B) \cap C = A \cap (B \cup C)$

d) $(A \cap B) \cup C = A \cup (B \cap C)$

#### Distributiv-Gesetzt

e) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

f) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

## Beweis: Teil e)

z.z. $\underbrace{A \cap (B \cup C)}_{=: M} = \underbrace{A \cap B) \cup (A \cap C)}_{=: N}$

Nach Definition $M = N \Leftrightarrow M \subset N \wedge N \subset M$

i) "$M \subset N$"d.h. $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$
   wieder nach Definition:
   Sei $x \in M \Rightarrow x \in A \vee x \in b \cup C$
   $\Rightarrow x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C)$
   Falls $x \in B$:
   $\Rightarrow x \in B \cap A = x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ( nach $\cup$ einfach dran gehängt )
   $\Rightarrow x \in N$, also $M \subset N$
   Falls $x \in C \Rightarrow x \in A \cap C$
   $\Rightarrow x \in (A \cap C) \cup (A \cap B)$
   $\Rightarrow x \in N$, also $M \subset N$

ii) "$N \subset M$"
   sei $x \in N$ dann ist
   $(x \in A \cap B) \vee (x \in A \cap C)$
   $\Rightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)$ (Definition einsetzen)
   Falls $x \in A \wedge x \in B \Rightarrow x \in B \cup C$
   $\Rightarrow x \in A$, $A \cap (B \cup C)$, also $x \in M$
   Falls $x \in A \wedge x \in C \Rightarrow x \in A \wedge x \in C \cup B$
   $\Rightarrow x \in A \cap (B \cup C)$, also $x \in M$
   Gilt für alle $x \in N$, dass $x \in M \Rightarrow N \subset M$

zusammen $M \subset N$ , $N \subset M$
$\Rightarrow M = N$

# Wichtige Mengen

Wichtige Mengen sind:

- $\mathbb{N}$ - natürliche Zahlen, 1, 2, 3, ...
- $\mathbb{N}_0$ - natürliche Zahlen einschließlich 0
- $\mathbb{Z}$ - ganze Zahlen, 0, $\pm 1$, $\pm 2$, $\pm 3$, ...
- $\mathbb{Q}$ - rationale Zahlen, $\frac{p}{q}$, mit $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$
- $\mathbb{R}$ - reelle Zahlen, kommt später
- $\mathbb{C}$ - komplexe Zahlen (z.B. $x^2 + 1 = 0$), kommt später

## Mehr Bezeichnungen

- $\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$
- $\mathbb{R}^* := \{x \in \mathbb{R} | x \neq 0\}$
- $\mathbb{C}^* := \{z \in \mathbb{C} | z \neq 0\}$
- $\mathbb{C}^+$ - $z$ keine Kleiner/Größer-Aussage für komplexe Zahlen möglich

$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

# Abbildungen

Ein sehr wichtiger grundlegender Begriff ist die Abbildung:

## Definition 1.7

Sind $A$ und $B$ Mengen und ist $f : A \longrightarrow B$ eine Abbildung, so wird jedem $xinA$ $\underline{\underline{\text{genau}}}$ ein Element $f(x) \in B$ zugeordnet wird.
Die Menge
$G_f : \{(x,y) \in A \times B | y = f(x)\}$
bezeichnet man als den Graphen von f.
Mathematisch:
$\forall x \in A \exists ! y \in B$ mit $(x,y) \in G_f$ oder $y = f(x)$
Ist $f : A \longleftrightarrow B$ eine Abbildung, so heißt
$f := f(A) := \{f(x) | x \in A\}$
das Bild von $f$ oder der Wertebereich von $f$,

$D(f) := A$ heißt der Definitionsbereich von $f$.
Für $x \in A, y \in B$ mit $y = f(x)$, so heißt $x$ Urbild von $y$.

## Beispiele

i) Ist $A$ eine Menge, so sei $Id : A \longrightarrow A$ die Abbildung, die jedes $x \in A$ auf sich selbst abbildet. Also, $Id(x) = x$, $Id$ nennt man identische Abbildung oder Identität von $A$.

ii) Beim Taxifahren ist der Fahrpreis eine Abbildung der gefahrenen Kilometer,
$f : K \longrightarrow P$
$f(k) = a \cdot k + b$
k:= Kilometerzahl, a:= Tarif pro Kilometer, b:= Grundgebühr

iii) Bei freiem Fall ist die durchgefallene Stecke eine Abbildung der Zeit.
$f : T \longrightarrow S$
$f(t) = V_0 - g \cdot t^2$
$V_0$ - Anfangsgeschwindigkeit, g - Erdbeschleunigung, t - Zeit

iv) Ist $M = \{1,2,3,4,5,6\}$, so ist jede Vertauschung der Reihenfolge der zahlen 1,2,3,4,5,6 eine Abbildung von $M$ nach sich selbst $\{1,3,2,4,5,6\}$
$f : M \longrightarrow M$ [f bedeutet vertauschen]

## Definition 1.8

Eine Abbildung $f : A \longrightarrow B$ heißt
surjektiv, wenn $f8A) = B$, Wertebereich von $f$ entspricht der ganzen Menge $B$
injektiv, wenn aus $x,y \in A, x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$
bijektiv, wenn zu $\forall y \in B \exists! x \in A$ mit $f(x) = y$
(also, bijektiv = surjektiv + injektiv)

Umkehrabbildung $f^-1 : B \longrightarrow A$ ist definiert, wenn man z.B. eine bijektive Abbildung $f : A \longrightarrow B$ hat
Für $y \in B$ ist $f^-1(y)$ das $x \in A$, mit $f(x) = y)$

## Definition 1.9

Sind $A$,$B$,$C$ Mengen und $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow A$ Abbildungen, so definiert man eine Abbildung $g \odot f : A \longrightarrow C$ die Verknüpfung von $f$ auf $g$ $x \longrightarrow f(f(x))$

## Surjektiv

$$\forall y \in B, \exists x \in A, f(x) = y$$

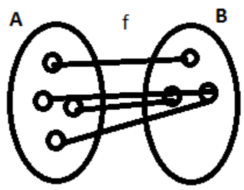


Abbildung 6: surjektiv

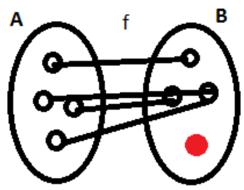


Abbildung 7: nicht surjektiv

## Injektiv

$$\forall x,y \in A, x \neq y \rightarrow f(x) \neq f(y)$$

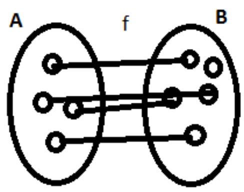


Abbildung 8: injektiv

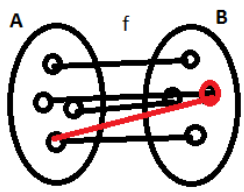


Abbildung 9: nicht injektiv

## Bijektiv

$$\text{surjektiv} + \text{injektiv} = \text{bijektiv}$$

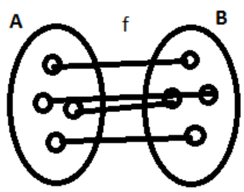


Abbildung 10: bijektiv

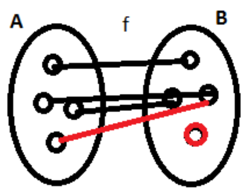


Abbildung 11: nicht bijektiv

### Beispiele

i) $A :=$ Mengen aller Sitzplätze im Bremer Theater

$B :=$ Menge aller Besucher mit einer Platznummer
$f : A \longrightarrow B$
Platz $\longmapsto$ Besucher
$g : B \longrightarrow A$
Besucher $\longmapsto$ Platznummer

Ist $g$ injektiv?
Ja, verschiedene Besucher haben verschiedene Nummern.
$x \neq y \rightarrow g(x) \neq g(y)$
Ist $g$ surjektiv? (surjektiv: $g(B) = A$)
Nicht immer! 2000 Plätze und 500 Besucher. $g$ ist nur dann surjektiv, wenn das Theater ausverkauft ist. Dann hat jeder Platz einen Besucher: $\forall z \in A \exists x \in B$ mit $g(x) = z$
$\rightarrow g$ ist bijektiv, wenn das Theater ausverkauft ist (also surjektiv + injektiv)

ii) $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$
$[Definitionsmenge] n \longmapsto 2n [Wertebereich]$
$f$ ist injektiv, da $\forall n,m \in \mathbb{N}$
$\rightarrow f(n) = 2n$
$f(m) = 2m$
$f(n) \neq f(m)$
$2n \neq 2m$
$f$ ist nicht surjektiv, die Zahl 3 hat kein Urbild.

iii) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \sin x$
Ist $f$ injektiv? Nein, für $x_1 = 0, x_2 = \pi, x_1 \neq x_2$, gilt $f(0) = f(\pi) = 0$
$f$ ist nicht surjektiv, da $\nexists x \in \mathbb{R}$, sodass $f(x) = 2$
Aber $f : \mathbb{R} \longrightarrow [-1,1]$ ist surjektiv
Alles Hängt vom Definitionsbereich und Bildbereich ab.

## 1.4 Funktionen

### Definition 1.10

Eine Abbildung $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ [Immer reelle Zahlen -> Bildbereich] (also $B = \mathbb{R}$) einer Menge $A$ in die reellen Zahlen bezeichnet man als reelle Funktion. Häufig hat man eine

Teilmenge $D \subset \mathbb{R}$ und eine auf $D$ definierte Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$
Ist $f$ explizit gegeben, etwa

$$f(x) = 5x - 3$$

so schreibt man

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto 5x - 3$$

Eine Funktion $f$ heißt gerade, wenn $f(-x) = f(x)$ sie heißt ungerade, wenn $f(-x) = -f(x)$ gilt.

## Beispiele

i) $f(x) = |x|$
$D(f) = \mathbb{R}$, Bild $f = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{wenn } x \geq 0 \\ -x, & \text{wenn x} < 0 \end{cases}$$

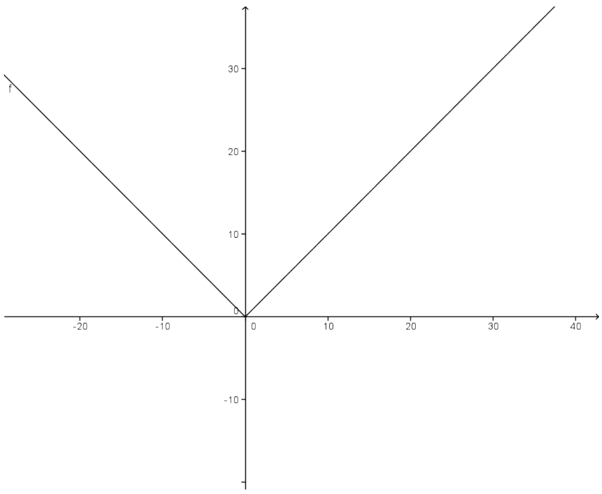


Abbildung 12: Betragsfunktion $f(x) = |x|$

ii) Heaviside - Funktion (wichtig für Anwender!)
$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x < 0 \\ 0, & \text{falls } x \geq 0 \end{cases}$$

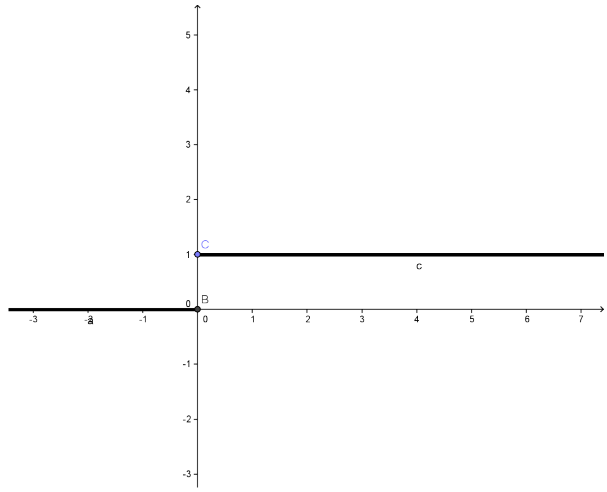

Abbildung 13: Betragsfunktion $Heaviside - Funktion$

iii) Dan Kronecker - Symbol oder Kronecker Delta (Leopold Kronecker, deutscher Mathematiker)

$$\delta_i j = \begin{cases} 1, & \text{wenn } i = j \\ 0, & \text{wenn } i \neq j \end{cases}$$

dabei können $i$ und $j$ Elemente einer beliebigen Menge $I$ sein, eigentlich immer eine endliche Teilmenge der $\mathbb{N}$
$\delta : I \times I \longrightarrow \{0{,}1\}$

## 1.5 Logik als Sprache der Mathematik: Aussagelogik

Als Aussage bezeichnen wir ein grammatisch korrektes sprachliches Gebilde, das wahr oder falsch sein kann. Wir nehmen an, dass es keine dritte Möglichkeit gibt. Je nach dem, ob eine Aussage wahr oder falsch ist, ordnen wir den Wahrheitswert w oder f zu.

### Atomare Aussagen

lassen sich nicht mehr zerteilen

## Beispiele

i) Ëine Vorlesung ist 90 Min. lang"(w)

ii) "London ist die Hauptstadt von Deutschland"(f)

iii) "Mathe macht Spaß!"(w)

Aussagen im Allgemeinen bestehen aus atomaren Aussagen, die auf verschiedene Weise miteinander verbunden sein können.

## Beispiele 2

i) "Mark studiert Physik, aber nicht ET"

ii) "Wenn es regnet, ist die Straße nass"

Frage: Wie kann man atomare Aussagen zu zusammengesetzten Aussagen kombinieren? Wie kann man den Wahrheitsgehalt zusammengesetzter Aussagen bestimmen?

## Definition 1.11

Als Aussagen bezeichnet man genau jene Zeichenketten, die sich mit folgenden Regeln bilden lassen:

i) Die Zeichen A,B,C sind atomare Aussagen

ii) Wenn A und B Aussagen sind, dann sind auch folgende Zeichenketten Aussagen

- $\neg$A - Negation einer Aussage A (sprich: "nicht A")
- A $\wedge$ B - Konjunktion der Aussage A und B (sprich: Ä und B")
- A $\vee$ B - Adjunktion der Aussage A und B (sprich: Ä oder B")
- A $\Rightarrow$ B - Implikation (sprich: Äus A folgt B")
- A $\Leftrightarrow$ B - Äquivalenz (sprich: Ä gleichbedeutend mit B")

Mit Hilfe dieser Verknüpfung lassen sich nun formal "neueÄussagen bilden.

## Beispiel

i) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neq B \Rightarrow \neg A)$
(Wenn es regnet $\Rightarrow$ Die Straße ist nass)
$\Leftrightarrow$
(die Straße ist nicht nass $\Rightarrow$ es regnet nicht)
Da man in der Mathematik zu ganz sicheren Aussagen gelangen will, kann man allgemein so genannte Wahrheitstabellen aufstellen.

### Wahrheitstabellen

i) Negation

| A | ¬A |
|---|---|
| w | f |
| f | w |

ii) Konjunktion

| A | B | A ∧ B |
|---|---|---|
| w | w | w |
| w | f | f |
| f | w | f |
| f | f | f |

iii) Adjunktion

| A | B | A ∨ B |
|---|---|---|
| w | w | w |
| w | f | w |
| f | w | w |
| f | f | f |

iv) Folgt

| A | B | A ⇒ B |
|---|---|---|
| w | w | w |
| w | f | f |
| f | w | w |
| f | f | w |

v) Äquivalent

| A | B | A $\Leftrightarrow$ B |
|---|---|---|
| w | w | w |
| w | f | f |
| f | w | f |
| f | f | w |

Ä gilt genau dann, wenn B gilt. A ist notwendig und hinreichend für B "

### Beispiel:

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

| A | B | A $\Rightarrow$ B | $\neg$A | $\neg$B | $\neg$A $\Rightarrow$ $\neg$B | (A $\Rightarrow$B) $\Leftrightarrow$ ($\neg$B $\Rightarrow$ $\neg$A) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| w | w | w | f | f | w | w |
| w | f | f | f | w | f | w |
| f | w | w | w | f | w | w |
| f | f | w | w | w | w | w |

## Beweisverfahren

Die Form einer wahren Aussage ist oft eine Implikation
$A \Rightarrow B$
Wenn eine solche Aussage nicht offensichtlich ist und man ihr eine gewisse Wichtigkeit zuerkennen kann, nennt man eine solche Implikation einen **Satz**
Aussagen, die als Hilfsmittel beim Beweis eines Satzes verwendet werden sollen, nennt man **Lemma** (Hilfssatz)
Im Satz "$A \Rightarrow B$" heißt A die Voraussetzung und B die Behauptung.

### Beispiel: Satz

Für beliebige reelle Zahlen $a\,0$, $b\,0$ gilt

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \tag{1}$$

**Beweis:**

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{a^2+b^2}{ab}\veebar 2| \cdot ab \tag{2}$$
$$\Leftrightarrow a^2+b^2 \veebar 2ab| - 2ab \tag{3}$$
$$a^2+b^2-2ab \veebar 0 \tag{4}$$

**Lemma:**

$$a^2-2ab-b^2=(a-b)^2 \tag{5}$$

**Beweis:**

$$(a-b)^2=(a-b)\cdot(a-b) \tag{6}$$
$$=a^2-ab-bab^2 \tag{7}$$
$$=a^2-2ab+b^2 q.e.d. \tag{8}$$
$$\Rightarrow a^2+b^2-2ab=(a-b)^2 \geq 0 \tag{9}$$
$$\Rightarrow \frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2 q.e.d \tag{10}$$
$$\tag{11}$$

Häufig hängen mathematische Aussagen von Variablen ab. man spricht dann von einer <u>Aussageform</u> z.B.
$x^2-4x+3 \geq = \Leftrightarrow A(x)$
Setzt man für x einen konkreten Wert ein, so wird A(x) zu einer Aussage, die hier z.B. für x=0 wahr, für x = 2 aber falsch ist.
Mit Aussageformen formuliert man im Allgemeinen Aussagen der Art:
"Für alle x aus der Menge M gilt A(x)"
oder
"Es gibt ein x aus der Menge M sodass A(x) wahr ist"

**Beispiel**

"Für alle reellen Zahlen x gibt $x^2-4x+3 \geq 0$" falsch, denn für x =2 gilt die Aussage nicht.

Negation:
Es gibt eine reelle Zahl x, für die
$x^2-4x+3 < 0$ (z.B. x = 2)
Für Aussageformen werden häufig die <u>Quantoren</u> verwendet.

i) $\forall x \in M, A(x)$ bedeutet "für alle x aus der Menge M gilt A(x)"

ii) $\exists x \in M, A(x)$ bedeutet “es existiert ein x aus der Menge M sodass A(x) gilt“

Negation:
i) $\exists x \in M$, sodass A(x) nicht gilt
oder $\exists x \in M$, $\neg$A(x)
ii) $\forall x \in M$, A(x) nicht gilt
oder $\forall x \in M$, $\neg$A(x)

Also $\neg(\forall x \in M, A(x)) \Leftrightarrow \exists x \in M, \neg A(x)$
und $\neg(\exists x \in M, A(x)) \Leftrightarrow \forall x \in M, \neg A(x)$
Formal dreht man den Quantoren um eine Negation z bilden.

**Beispiele:**

i) “Für alle natürlichen zahlen n und m gilt $|n-m| \geq 1$“
oder
$\forall c \in \mathbb{N}(\forall m \in \mathbb{N}, |n-m| \geq 1)$ [Ausdruck in Klammern =: A(n)]
die Gesamtaussage ist falsch, denn für n = m gilt $|n-m| = 0 < 1$

Negation:

i) $\neg(\forall n \in \mathbb{N}(\forall m \in \mathbb{N}, |n-m| \geq 1))$
$\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}(\neg(\forall m \in \mathbb{N}, |n-m| \geq 1))$
$\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}(\exists m \in \mathbb{N}, |n-m| < 1)$
Die Aussage ist wahr!

ii) $\forall n \in \mathbb{N}(\exists m \in \mathbb{N}, |n-m| \geq 5)$

Die Aussage ist Wahr
<u>Verneinung:</u>
$\neg(\forall n \in \mathbb{N}(\exists m \in \mathbb{N}, |n-m| \geq 5))$
$\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}(\neg(\exists m \in \mathbb{N}, |n-m| \geq 5))$
$\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}(\forall m \in \mathbb{N}, |n-m| < 5)$
Die Aussage ist Falsch

Es gilt:
$\forall x in M_1(\forall y \in M_2, A(x,y))$
$\Leftrightarrow \forall y \in M_2(\forall x \in M_1, A(x,y))$
Einfacher: $\forall x \in M_1, y in M_2, A(x,y)$

Entsprechend gilt auch:
$\exists x \in M_1(\exists y \in M_2, A(x,y))$

$\Leftrightarrow \exists y \in M_2(\exists x \in M_1, A(x,y))$

Aber es gilt nicht:
$\forall x \in M_1(\exists y \in M_2, A(x,y))$
$\not\Leftrightarrow \exists y \in M_2(\forall x \in M_1, a(x,y))$

# 2.Zahlensysteme

## 2.1 Einführung der reellen Zahlen

Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{N} := \{1,2,3,...\}$
$\mathbb{N}_0 := \{0,1,2,3,.....\}$

<u>Modell:</u> Zahlenstrahl
—1—-2—3—4—>

## 2.1 Definition:

Natürliche Zahlen definiert man durch Peano-Axiome.

i) $1 \in \mathbb{N}$

ii) $n \in \mathbb{N}$
$Rightarrow n + 1 \in \mathbb{N}$

iii) $n \neq m \Rightarrow n + 1 \neq m + 1, n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}$

iv) $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n + 1 \neq 1$

v) Für $M \subset \mathbb{N}$ gilt $(1 \in M) \wedge (\forall k \in M, k + 1 \in M)$
$\Rightarrow M = \mathbb{N}$(vollständiges Axiom)

## Definition 2.2

Summen- und Produktzeichen
Seien $a_i \in \mathbb{N}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ sei $n \in \mathbb{N}$. Dann definiert man den Ausdruck.
$\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ Summe
durch $\sum\limits_{i=1}^{1} a_1 := a_1 \sum\limits_{i=1}^{n+1} a_i := \sum\limits_{i=1}^{n} a_i + a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$
und den Ausdruck

$\prod_{i=1}^{k} a_i$ durch

$\prod_{i=1}^{1} a_i = a_1$ $\prod_{i=1}^{k+1} a_i := \prod_{i=1}^{k} a_i \cdot a_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$

Aus Axiom v) ergibt sich ein wichtiges Beweisprinzip.

### Das Prinzip der vollständigen Induktion

Ist A(n) eine von $n \in \mathbb{N}$ abhängige Aussageform, so genügt es nachzuweisen

i) A(1) ist wahr (Anfangselement) (Induktionsanfang)

ii) Annahme: Für $n \in \mathbb{N}$ ist A(n) wahr (Induktionsanfang)

iii) Für $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt
A(n) $\Rightarrow$ A(k+1) (Induktionsschluss)
um zu zeigen, dass A(n) für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr ist.

### Beispiele

i) $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$ für $n \in \mathbb{N}$

1) $n = 1, 1 = 1$ (Richtig)

2) IA: $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$

3) z.z. $1 + 2 + 3 + ... + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

<u>Beweis:</u>

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = 1 + 2 + 3 + ... + n + (n+1)$$
$$= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$
$$= \frac{(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \text{ (Richtig)}$$

ii) Für $\forall\ n \in \mathbb{N}$ ist $n^3 + 5n$ durch 6 teilbar

1) $n = 1$ $n^3 + 5n = 6 \Rightarrow$ durch 6 teilbar

2) IA: $n^3 + 5n$ ist durch 6 teilbar

3) z.z. $(n+1)^3 + 5(n+1) = (n+1)(n+1)^2 + 5(n+1)$

Beweis:

$$
\begin{aligned}
(n+1)^3 + 5(n+1) &= (n+1)(n+1)^2 + 5(n+1) \\
&= (n+1)(n^2+2n+1) + 5(n+1) \\
&= n^3 + 3n^2 + 3n +^+ 5n + 5 \\
&= n^3 + 3n^2 + 8n + 6 \\
&= (n^3 + 5n) + 3n^2 + 3n + 6 \\
&= (n^3 + 5n) + 3(n^2 + n) + 6 \\
&= (n^3 + 5n) + 3n(n+1) + 6
\end{aligned}
$$

$3n(n+1)$ ist durch 6 teilbar, denn $n(n+1)$ ist durch 2 teilbar

$\Rightarrow (n+1)^3 + 5(n+1)$ist durch 6 teilbar

### Menge der ganzen Zahlen

$x + 2 = 5 \Rightarrow x = 3$
Aber $x + 5 = 2$ ist nicht wahr, in $\mathbb{N}$ lösbar. Dieses führt auf die Erweiterung der Menge $\mathbb{N}$ zur Menge

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm\ 1, \pm\ 2, \pm\ 3\}$$

<u>Modell:</u> —-[-3]—-[-2]—-[-1]—-[0]—-[+1]—-[+2]—-[+3]—-

Operationen: +, -, $\cdot$, $\div$
Problem mit: $\div$, $\cdot$

$5x = 10 \ \Rightarrow x = 2$
Aber, $2x = 5 \Rightarrow$ nicht in $\mathbb{Z}$ lösbar

### Menge der rationalen Zahlen

$2x = 5 \Rightarrow x =? \quad = 5 : 2$
Dieses führt zur Einführung von Brüchen und letztlich zur Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen.

$\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} | p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$

—-[-3]—-[-2]—-[-1]—-[0]–[$\frac{1}{2}$]-[$\frac{2}{3}$]-[+1]—-[+2]—-[+3]—-

<u>Operationen:</u> +,1,$\cdot$, $\div$

**Reelle Zahlen**

Was ist mit $x^2 = 2$ ?
$x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$
Ist $\sqrt{2}$ rational? **Nein!** (Behauptung)

<u>Widerspruchsbeweis:</u>
Wir nehmen an dass $\sqrt{2}$ rational ist.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \sqrt{2} = \frac{p}{q}, \text{ wobei} \frac{p}{q} \text{ ist nicht kürzbar} \\
&\Leftrightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2} \\
&\Leftrightarrow 2q^2 = p^2 \\
&\Rightarrow p^2 \text{ ist gerade Zahl} \Rightarrow p \text{ ist gerade(weil } p \cdot p = p^2) \\
&\text{Also, } p = 2k \\
&\Rightarrow p^2 = 4k^2 \\
&\Rightarrow 2q^2 = 4k^2 \\
&\Rightarrow q^2 = 2k^2 \\
&\Rightarrow q^2 \text{ gerade} \Rightarrow q \text{ gerade}
\end{aligned}$$

Also $p$ ist gerade, $q$ ist gerade $\Rightarrow \frac{p}{q}$ ist kürzbar. <u>**Widerspruch**</u>

$\Rightarrow$ Unsere Annahme ist falsch!
$\Rightarrow$ $\sqrt{2}$ ist nicht rational

Also, $\mathbb{R} = \mathbb{Q} +$ irrationale Zahlen (Zahlen wie $\sqrt{2}$ oder unendliche Dezimalzahlen)

Reelle Zahlen führt man auch <u>axiomatisch</u> ein.(sie z.B. Walter Analysis 1, usw.)

### Eigenschaften der reellen Zahlen

Es gelten die bekannten Rechenregeln für die 4 Grundoperationen $+$,-,$\cdot$,$\div$

Rechengesetz

- **Addition**
- (A1) $x + (y + z) = (x + y) + z$ (Assoziativgesetz)
- (A2) $x + y = y + x$ (Kommutativgesetzt)
- (A3) $x + 0 = x$ (Existenz der Null, neutrales Element)
- (A4) zu jedem $x$ gibt es ein $(-x)$ mit $(x) + (-x) = 0$ (Inverses Element)
- **Multiplikation**
- (M1) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (Assoziativgesetz)
- (M2) $x \cdot y = y \cdot x$ (Kommutativgesetz)
- (M3) $x \cdot 1 = x$ (Existenz eines neutrales Elementes)
- (M4) zu jedem $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ gibt es ein $x^-1 = \frac{1}{x} \in \mathbb{R}$ mit $x \cdot x^-1 = 1$
- Distributivgesetz $x(y + z) = xy + xz$

($\mathbb{R}$, $+$ ,$\cdot$) heißt **Körper** der reellen Zahlen

- $\mathbb{R}$ = Menge
- $+$,$\cdot$ = Operationen

## Anordnung der reellen Zahlen

Für alle $a$,$b$, $\in \mathbb{R}$ gilt:

Entweder $a < b \vee a = b \vee a < b$

Rechenregeln:

i) $(a < b \wedge b < c) \Rightarrow a < c$

ii) $(a < b) \Rightarrow (a + b < b + d)$

iii) $(a < b \wedge c > 0) \Rightarrow ac < bc$

iv) $(a < b, c < 0) \Rightarrow ac > bc$

Schreibweise: $a \leq b$ für $a < b \vee a = b$

### Betrag und Wurzel

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0 \\ -x, & \text{falls } x < 0 \end{cases} \qquad |x| \geq 0$$